

Concours du second degré – Rapport de jury
Session 2021

CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ

CAPES externe et CAFEP

Section MATHÉMATIQUES

Rapport présenté par le directoire du jury

Les rapports des jurys des concours sont établis sous la responsabilité des présidents de jury

Conseil aux futurs candidats

Il est recommandé aux candidats de s'informer sur les modalités du concours.

Les renseignements généraux (conditions d'accès, épreuves, carrière, etc.) sont donnés sur le site du ministère de l'Éducation nationale de la jeunesse et des sports :

http://www.devenirenseignant.gouv.fr/

Le jury du CAPES externe de Mathématiques met à disposition des candidats et des formateurs un site spécifique :

http://capes-math.org/

Les épreuves écrites de cette session se sont tenues les 30 et 31 mars 2021.

Les épreuves orales se sont déroulées du 11 juin au 2 juillet 2021, dans les locaux du lycée Frédéric Chopin à Nancy.

Le jury tient à remercier l'équipe de direction et l'ensemble des personnels du lycée pour la grande qualité de leur accueil, ainsi que la division des examens et concours de l'académie de Nancy-Metz qui a facilité le bon déroulement des épreuves.

Table des matières

1 Présentation du concours

1.1 Définition des épreuves

À compter de la **session 2022**, les concours de recrutement de professeurs certifiés seront régis par l'arrêté du 25 janvier 2021 (MENH2033181A).

Un sujet zéro pour la deuxième épreuve d'admissibilité a été publié sur le site devenirenseignant.

Pour la session 2021, les épreuves étaient définies par l'arrêté du 19 avril 2013 (MENH1310120A).

A – Épreuves d'admissibilité

1° Première épreuve d'admissibilité
Durée : 5 heures
Coefficient 1

Le programme de l'épreuve pour la session 2021 a été publié sur le site du ministère.

Le sujet est constitué d'un ou plusieurs problèmes. L'épreuve permet d'apprécier la connaissance de notions mathématiques au programme du concours. Elle sollicite également les capacités de raisonnement et d'argumentation du candidat ainsi que sa maîtrise de la langue française.

2° Deuxième épreuve d'admissibilité
Durée : 5 heures
Coefficient 1

Le programme de cette épreuve est constitué des programmes de mathématiques du collège et des différentes séries du lycée général et technologique. Les notions traitées dans ces programmes doivent pouvoir être abordées avec un recul correspondant au niveau M1 du cycle master.

Le sujet est constitué de plusieurs problèmes. L'épreuve permet au candidat de mettre ses savoirs en perspective et de manifester un recul critique vis-à-vis de ces savoirs. Elle permet en outre d'apprécier, outre les qualités scientifiques du candidat, son aptitude à se placer dans une optique professionnelle. Certaines questions font appel à une analyse réflexive pour mettre en perspective des notions au programme de l'enseignement secondaire et justifier des choix pédagogiques.

B – Épreuves d'admission

1° Épreuve de mise en situation professionnelle
Durée de la préparation : 2 heures 30
Durée de l'épreuve : 1 heure
Coefficient 2

L’épreuve comporte un exposé du candidat suivi d’un entretien avec le jury. Elle prend appui sur les programmes de mathématiques du collège et des différentes séries du lycée général et technologique. Les notions traitées dans ces programmes doivent pouvoir être abordées avec un recul correspondant au niveau M1 du cycle master.

L’épreuve permet d’apprécier la capacité du candidat à maîtriser et organiser des notions sur un thème donné, et à les exposer de façon convaincante. Elle consiste en la présentation d’un plan hiérarchisé qui doit mettre en valeur le recul du candidat par rapport au thème. Le candidat choisit un sujet parmi deux qu’il tire au sort. Pendant vingt minutes, il expose un plan d’étude détaillée du sujet qu’il a choisi. Cet exposé est suivi du développement par le candidat d’une partie de ce plan d’étude, choisie par le jury, puis d’un entretien portant sur ce développement ou sur tout autre aspect en lien avec le sujet choisi par le candidat.

2° Épreuve sur dossier
Durée de la préparation : 2 heures 30
Durée de l’épreuve : 1 heure (exposé : 20 minutes, entretien : 40 minutes)
Coefficient 2

Le programme de cette épreuve est constitué des programmes de mathématiques du collège et du lycée général et technologique.

L’épreuve permet d’apprécier la capacité du candidat à engager une réflexion pédagogique pertinente et à communiquer efficacement. Elle donne également au candidat la possibilité de valoriser sa culture scientifique et sa connaissance des programmes officiels. L’épreuve prend appui sur un dossier fourni par le jury, comprenant des documents de natures diverses (scientifiques, didactiques, pédagogiques, extraits de manuels, travaux d’élèves) et portant sur un thème des programmes de mathématiques du collège ou du lycée général ou technologique. Ce thème peut être illustré par un exercice qui peut être complété par des productions d’élèves, des extraits des programmes officiels, des documents ressources ou des manuels. Les réponses du candidat aux questions posées dans le dossier permettent d’apprécier ses qualités pédagogiques et sa réflexion didactique. Elles concernent l’énoncé de l’exercice, les compétences que celui-ci mobilise, les démarches possibles, les méthodes de résolution ou les éléments d’évaluation. Le candidat doit également proposer des exercices s’inscrivant dans le thème du dossier et visant les objectifs précisés par le jury.

Pendant vingt minutes, le candidat expose ses réponses aux questions posées dans le dossier. L’entretien avec le jury prend appui sur la présentation faite par le candidat, en particulier sur les exercices qu’il a proposés, aussi bien en ce qui concerne leur résolution que leur intégration dans une séquence pédagogique. L’entretien permet aussi d’évaluer la capacité du candidat à prendre en compte les acquis et les besoins des élèves, à se représenter la diversité des conditions d’exercice de son métier futur, à en connaître de façon réfléchie le contexte dans ses différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République.

1.2 Programme du concours

Le programme des épreuves est constitué des programmes du collège et du lycée général et technologique en vigueur, auxquels s'ajoute, pour la première épreuve d'admissibilité, un programme spécifique publié pour chaque session sur le site du ministère de l'éducation nationale.

1.3 Composition du jury

Le jury du CAPES et du CAFEP, section Mathématiques, a été constitué pour la session 2021 de 153 personnes, nommées par un arrêté du ministre de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports en date du 5 février 2021.

2 Quelques statistiques

2.1 Historique

Les effectifs restent comparables à ceux des années antérieures, même si le nombre de présents est en légère hausse (+147 au CAPES externe, +60 au CAFEP).

L'absentéisme aux épreuves orales demeure important : 10% pour l'ensemble des deux concours, contre 13,1% en 2019.

Seulement 2075 candidats se sont présentés aux épreuves d'admissibilité du CAPES externe pour 1167 postes offerts au concours.
Afin de maintenir le niveau d'exigence que requiert le recrutement de professeurs certifiés, la barre d'admission de 8 sur 20, adoptée lors des sessions 2018 et 2019, a été reconduite, ce qui a permis de recruter 1067 candidats (ainsi que 2 admis à titre étranger).

CAPES	Postes	Inscrits	Présents	Présents/ Inscrits	Admissibles	Admissibles/ Présents	Admis	Admis/ Présents
2021	1167	3820	2075	54%	1706	82%	1067	51%
2020	1185	3653	1928	53%	---	---	1045	54%
2019	1200	4563	2139	47%	1706	80%	973	45 %
2018	1183	5074	2263	45%	1760	78%	1070	47%
2017	1440	5249	2306	44%	1942	84%	1066	46%
2016	1440	5373	2288	43%	1870	82%	1137	50%
2015	1440	4645	2205	47%	1803	82%	1097	50%
2014	1243	4268	2327	55%	1892	81%	838	36%
2014e	1592	4763	2454	52%	1903	78%	794	32%
2013	1210	3390	1613	48%	1311	81%	817	51%
2012	950	3194	1464	46%	1176	80%	652	45%
2011	950	2862	1285	45%	1047	81%	574	45%
2010	846	4020	2695	67%	1919	71%	846	31%
2009	806	4243	3160	74%	1836	58%	806	26%
2008	806	4711	3453	73%	1802	52%	806	23%
2007	952	5388	3875	72%	2102	54%	952	25%
2006	952	5787	3983	69%	2043	51%	952	24%
2005	1310	6086	4074	67%	2473	61%	1310	32%

526 candidats se sont présentés aux épreuves d'admissibilité du CAFEP pour 192 postes offerts au concours, de sorte que tous les postes ont été pourvus (moyenne du dernier admis : 9,07 sur 20).
Deux candidats ont été inscrits sur une liste complémentaire.

CAFEP	Postes	Inscrits	Présents	Présents/ Inscrits	Admissibles	Admissibles/ Présents	Admis	Admis/ Présents
2021	192	1016	526	52%	390	74%	192 (+2)	37%
2020	210	944	466	49%	---	---	210 (+4)	45%
2019	173	1182	498	42%	343	69%	172	35%
2018	174	1269	567	44%	337	59%	170	30%
2017	176	1318	642	49%	397	62%	176	27%
2016	174	1273	549	43%	410	75%	174	32%
2015	178	1039	495	48%	388	78%	178	36%
2014	151	747	452	61%	342	76%	136	30%
2014e	155	971	493	51%	342	69%	155	31%
2013	105	703	359	51%	272	76%	105	29%
2012	75	736	319	43%	214	67%	75	24%
2011	90	618	276	45%	198	72%	90	33%
2010	155	879	554	63%	308	56%	119	21%
2009	109	901	633	70%	268	42%	109	17%
2008	155	964	631	65%	200	32%	90	14%
2007	160	1019	693	68%	267	39%	123	18%
2006	135	1096	689	63%	283	41%	126	18%
2005	177	1051	644	61%	279	43%	139	22%

2.2 Répartition des notes : épreuves d'admissibilité

Les données suivantes concernent les concours du CAPES et du CAFEP réunis. Sauf mention contraire, les notes indiquées sont sur 20.

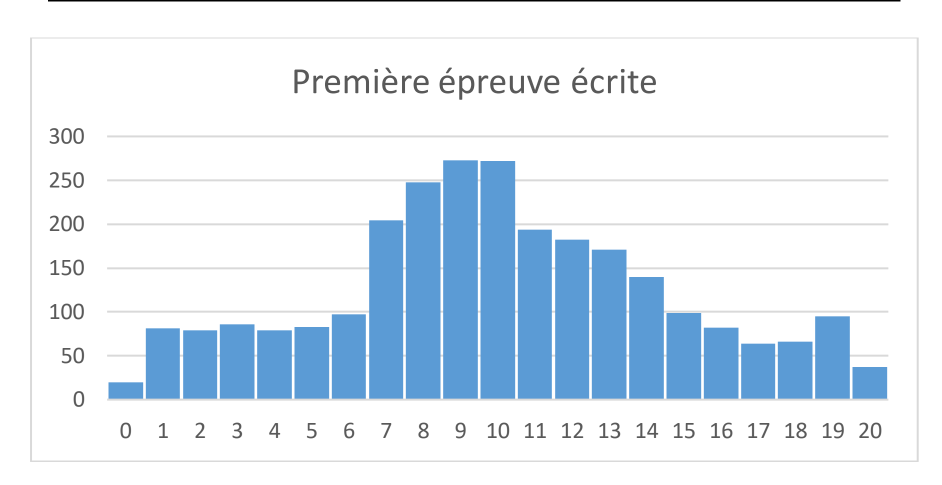
Ont été éliminés :

- 29 candidats ayant obtenu la note 0 a au moins l'une des deux épreuves,
- 52 candidats s'étant présentés une seule des deux épreuves.

La barre d'admissibilité a été fixée à 12 sur 40 pour le CAPES et le CAFEP.

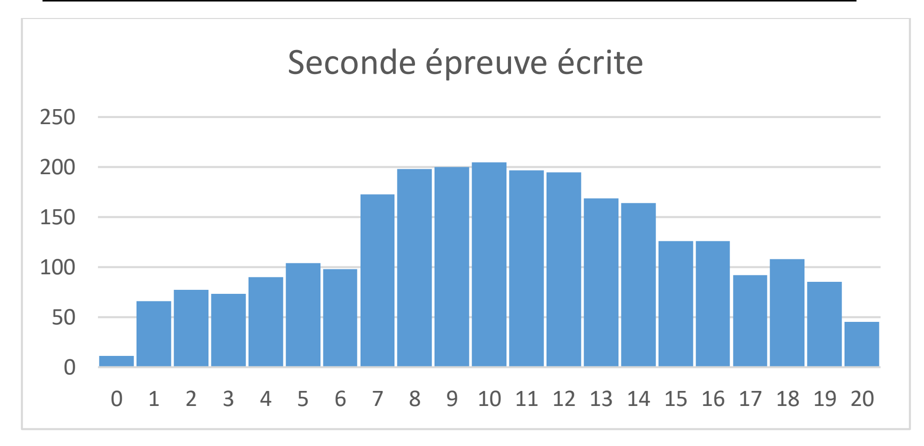
Première épreuve écrite

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
6,20	3,90	3,32	5,70	8,56



Seconde épreuve écrite

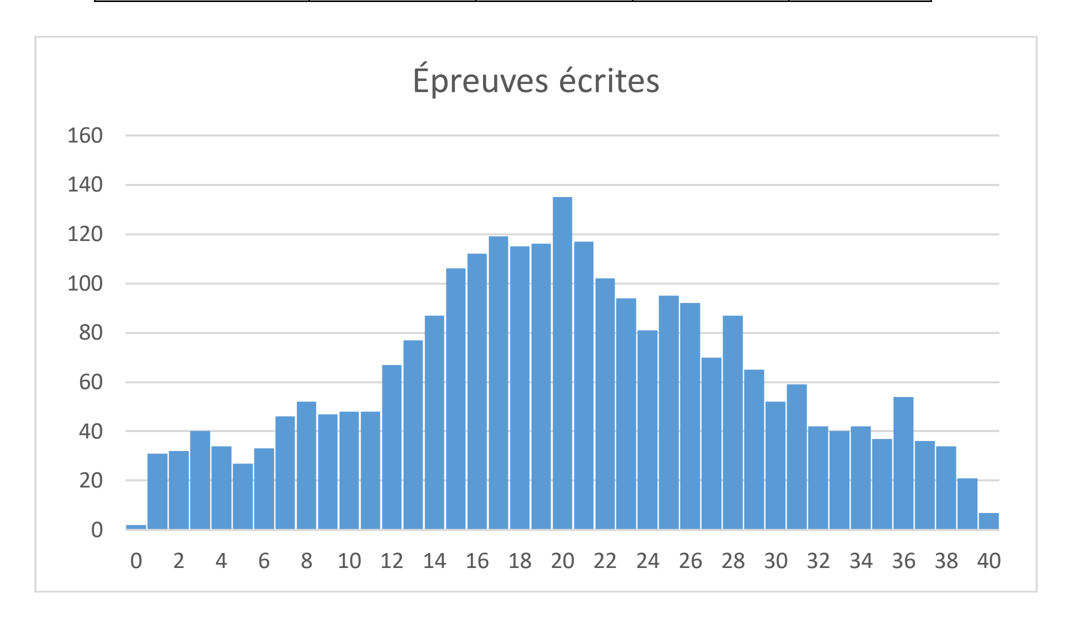
Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
8,74	4,62	5,30	8,54	12,05



Le coefficient de corrélation linéaire entre les notes des deux épreuves écrites est 0,883.

Total des épreuves écrites (sur 40)

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
19,69	9,03	13,77	19,49	25,93

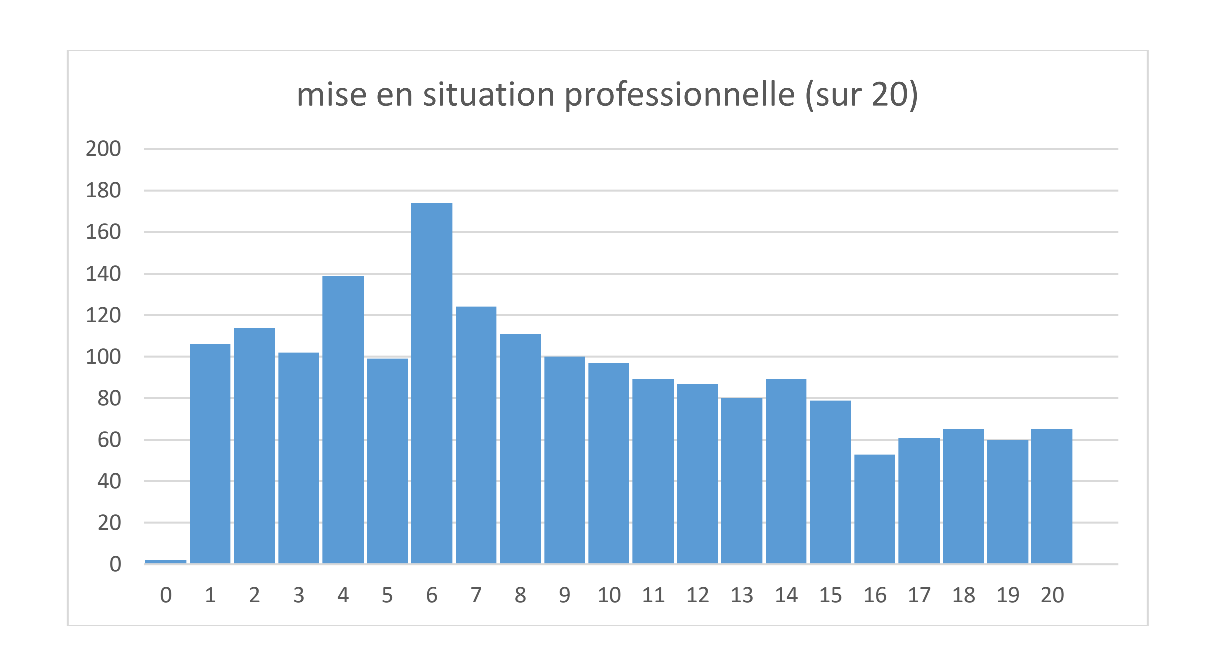


2.3 Répartition des notes : épreuves d'admission

La moyenne des notes obtenues par les candidats à la première épreuve orale est en augmentation de 0,27 point par rapport à la session 2019.

Première épreuve orale (mise en situation professionnelle)

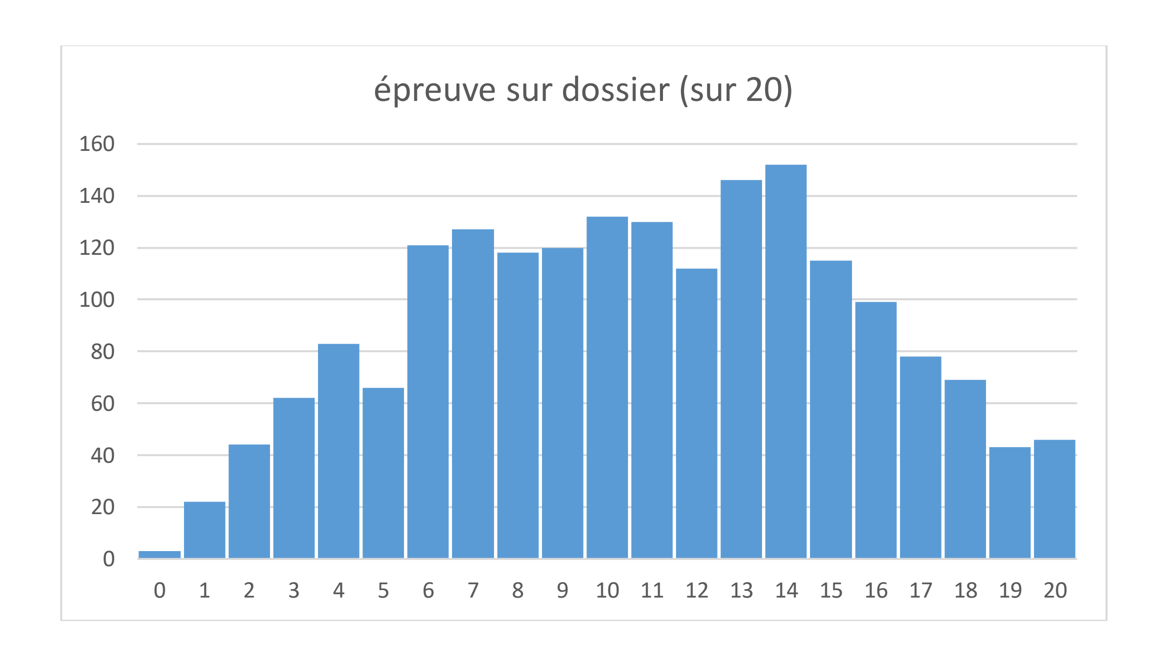
Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
8,85	5,49	4,20	8,00	13,00



La moyenne des notes obtenues par les candidats à la première épreuve orale est en augmentation de 0,47 point par rapport à la session 2019.

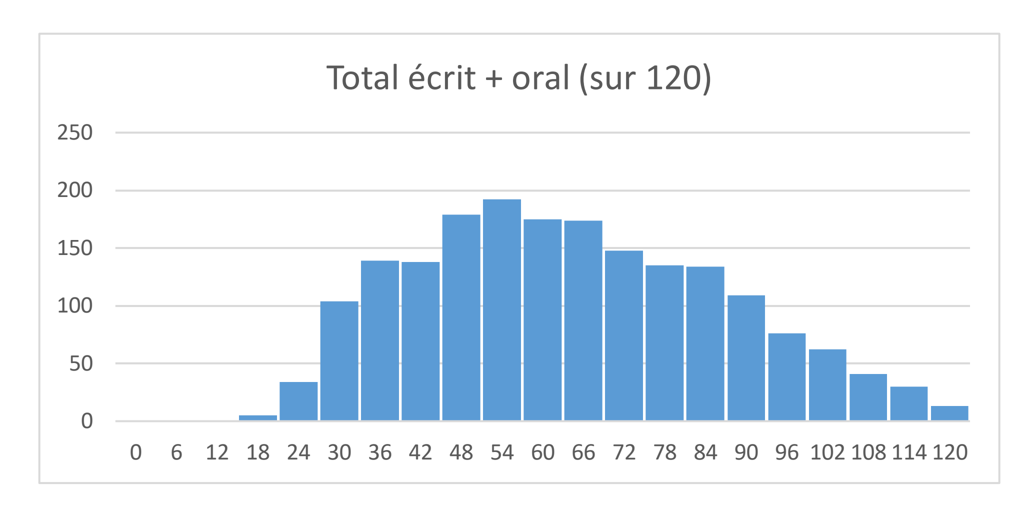
Seconde épreuve orale (épreuve sur dossier)

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
10,29	4,72	6,60	10,34	13,91



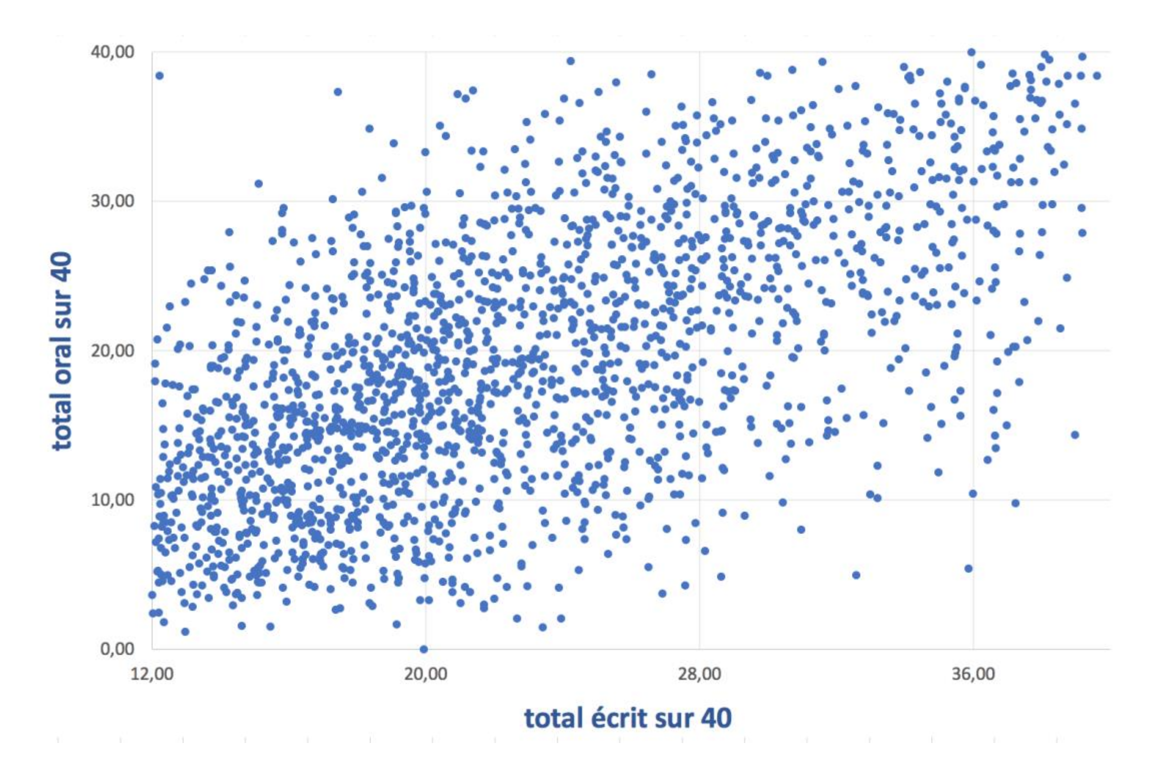
Total des épreuves orales (sur 120)

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
61,17	22,37	44,20	59,31	77,73



Voici quelques coefficients de corrélation entre les différentes épreuves :
- épreuves écrites – épreuves orales : 0,60 ;
- première épreuve orale – seconde épreuve orale : 0,49 ;
- épreuves écrites – première épreuve orale : 0,54 ;
- épreuves écrites – seconde épreuve orale : 0,49.

Le nuage de points ci-dessous donne la répartition des notes obtenues par les candidats admissibles.



2.4 Autres données

Les données suivantes concernent les concours du CAPES et CAFEP réunis. Elles ont été établies à partir des renseignements fournis par les candidats au moment de leur inscription.

	Inscrits		Présents		Admissibles		Admis	
Homme	2977	62%	1610	62%	1335	64%	798	63%
Femme	1859	38%	991	38%	761	36%	463	37%
Total	4836		2601		2096		1261	

Académie	Inscrits		Présents		Admissibles		Admis	
AIX-MARSEILLE	235	4,86%	118	4,54%	83	3,96%	47	3,73%
AMIENS	96	1,99%	58	2,23%	51	2,43%	36	2,85%
BESANCON	85	1,76%	59	2,27%	52	2,48%	34	2,70%
BORDEAUX	192	3,97%	104	4,00%	79	3,77%	51	4,04%
CAEN	88	1,82%	60	2,31%	51	2,43%	28	2,22%
CLERMONT-FERRAND	68	1,41%	47	1,81%	44	2,10%	30	2,38%
CORSE	13	0,27%	3	0,12%	3	0,14%	3	0,24%
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	1182	24,44%	527	20,26%	397	18,94%	214	16,97%
DIJON	62	1,28%	35	1,35%	26	1,24%	15	1,19%
GRENOBLE	188	3,89%	95	3,65%	81	3,86%	55	4,36%
GUADELOUPE	50	1,03%	22	0,85%	9	0,43%	4	0,32%
GUYANE	31	0,64%	15	0,58%	7	0,33%	5	0,40%
LA REUNION	111	2,30%	66	2,54%	48	2,29%	20	1,59%
LILLE	288	5,96%	161	6,19%	124	5,92%	85	6,74%
LIMOGES	55	1,14%	29	1,11%	20	0,95%	10	0,79%
LYON	256	5,29%	151	5,81%	127	6,06%	85	6,74%
MARTINIQUE	32	0,66%	15	0,58%	6	0,29%	1	0,08%
MAYOTTE	29	0,60%	12	0,46%	8	0,38%	3	0,24%
MONTPELLIER	200	4,14%	95	3,65%	78	3,72%	42	3,33%
NANCY-METZ	147	3,04%	99	3,81%	83	3,96%	51	4,04%
NANTES	223	4,61%	148	5,69%	125	5,96%	76	6,03%
NICE	143	2,96%	63	2,42%	54	2,58%	33	2,62%
NOUVELLE CALEDONIE	32	0,66%	16	0,62%	13	0,62%	8	0,63%
ORLEANS-TOURS	123	2,54%	70	2,69%	62	2,96%	43	3,41%
POITIERS	87	1,80%	58	2,23%	49	2,34%	29	2,30%
POLYNESIE FRANCAISE	16	0,33%	7	0,27%	6	0,29%	3	0,24%
REIMS	86	1,78%	57	2,19%	54	2,58%	24	1,90%
RENNES	218	4,51%	136	5,23%	117	5,58%	76	6,03%
ROUEN	105	2,17%	64	2,46%	50	2,39%	28	2,22%
STRASBOURG	162	3,35%	85	3,27%	75	3,58%	42	3,33%
TOULOUSE	233	4,82%	126	4,84%	114	5,44%	80	6,34%
TOTAL	4836	100,00%	2601	100,00%	2096	100,00%	1261	100,0%

	Inscrits		Présents		Admissibles		Admis	
ETUDIANTS INSPE 1ERE ANNEE	990	20,47%	891	34,26%	812	38,76%	571	45,28%
ETUDIANTS INSPE 2EME ANNEE	273	5,65%	215	8,27%	193	9,21%	117	9,28%
ETUDIANTS HORS INSPE	509	10,52%	348	13,38%	323	15,42%	202	16,02%
ASSISTANT D'EDUCATION	144	2,98%	71	2,73%	38	1,81%	16	1,27%
EMPLOIS D'AVENIR PROFESSEUR	18	0,37%	8	0,31%	7	0,34%	2	0,16%
CONTRACTUELS	626	12,94%	284	10,93%	169	8,06%	61	4,84%
MAITRES AUXILIAIRES	159	3,29%	74	2,85%	45	2,15%	17	1,35%
VACATAIRES	71	1,46%	32	1,23%	22	1,05%	14	1,11%
ENSEIGNANTS ÉDUC. NATIONALE	373	7,70%	109	4,21%	72	3,45%	23	1,82%
AUTRES FONCTIONNAIRES	112	2,30%	36	1,40%	25	1,16%	11	0,87%
CADRES SECT PRIVE	395	8,17%	88	3,38%	64	3,05%	36	2,85%
SANS EMPLOI	782	16,17%	327	12,57%	245	11,69%	147	11,66%
AUTRES	384	7,95%	118	4,53%	81	3,86%	44	3,49%
TOTAL	4836	100%	2601	100%	2096	100%	1261	100%

AGE	**Inscrits**		**Présents**		**Admissibles**		**Admis**	
18-20	2	0,04%	2	0,1%	2	0,10%	1	0,08%
20-24	1465	30,29%	1219	58,2%	1130	53,94%	794	62,97%
25-29	1110	22,95%	628	30,0%	503	24,01%	273	21,65%
30-34	680	14,06%	277	13,2%	180	8,59%	90	7,14%
35-39	429	8,87%	135	6,4%	67	3,20%	26	2,06%
40-44	438	9,06%	120	5,7%	77	3,68%	27	2,14%
45-49	328	6,78%	99	4,7%	56	2,67%	24	1,90%
50-54	232	4,80%	66	3,2%	43	2,05%	16	1,27%
55-59	108	2,23%	39	1,9%	26	1,24%	8	0,63%
60-64	41	0,85%	15	0,7%	11	0,53%	2	0,16%
65-70	3	0,06%	1	0,0%	1	0,05%	0	0,00%

	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Âge du plus jeune	19,4	19,4	19,4	19,4
Âge du plus âgé	66,5	65,2	65,2	60,4
Âge moyen	32,5	29,1	27,8	26,2

3 Énoncés

3.1 Sujet de la première épreuve écrite



EBE MAT 1

SESSION 2021

CONCOURS EXTERNE
CAPES / CAPES-CAFEP

Section : MATHÉMATIQUES

Section : LANGUES RÉGIONALES Option : BRETON

Section : LANGUES KANAK Option : NENGONE

PREMIÈRE ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie et poursuivre l'épreuve.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Pour i et j deux entiers naturels tels que $i \leqslant j$, $[\![i\,;j]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $i \leqslant k \leqslant j$.

Partie A : étude des nombres harmoniques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

I. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

II. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

III. À l'aide de la relation précédente :

1. Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

2. Démontrer que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

IV. On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n), \qquad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive. Cette limite est notée γ.

V. 1. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leqslant H_n - \ln(n) - \gamma \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. Écrire en langage Python une fonction prenant comme argument un nombre réel ε strictement positif et renvoyant une valeur approchée de γ à ε près. On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

Partie B : le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

VI. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

VII. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On explicitera le théorème de convergence utilisé.

VIII. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0\,;\pi]$, on pose

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0\,;\pi]$,

$$\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = D_n(t).$$

2. En déduire que, si $t \in]0\,;\pi]$,

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Calculer la valeur de $D_n(0)$.

IX. On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t}{\sin(t)} \text{ si } t > 0, \\ 1 \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. Démontrer que f est dérivable en 0.

3. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

X. **1.** Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul,

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t=\frac{1}{k^2}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$B_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{D_n(t)-1}{2}\mathrm{d}t.$$

3. Déterminer la valeur de

$$\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t.$$

4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6}-B_n=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)D_n(t)\mathrm{d}t.$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel non nul,

$$\frac{\pi^2}{6}-B_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sin(t)}\left(2-\frac{2t}{\pi}\right)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t.$$

XI. Déterminer une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ telle que

$$\frac{\pi^2}{6}-B_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t.$$

XII. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t=0.$$

XIII. En déduire la limite de la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie C : les lois géométriques

XIV. Démontrer que, pour tout $x\in]-1\,;1[$, la série de terme général x^k converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}.$$

XV. Justifier, pour tout $x\in]-1\,;1[$, les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\qquad \sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)x^{k-2}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

On citera précisément les théorèmes utilisés.

XVI. Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$. Démontrer qu'on définit une loi de probabilité sur l'univers $\mathbb{N}^*$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = p(1-p)^{k-1}.$$

On rappelle qu'une variable aléatoire définie sur un univers Ω suit la loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

XVII. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Démontrer que X admet une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, et une variance, notée $\mathbb{V}(X)$, vérifiant :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

XVIII. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i)$, où $p_i \in]0\,;1[$.

1. Donner l'espérance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ en fonction des p_i.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}.$$

Partie D : inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

XIX. Inégalité de Markov

Soit Y une variable aléatoire positive définie sur un univers Ω, possédant une espérance notée $\mathbb{E}(Y)$.
Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

On pourra décomposer $Y(\Omega)$ sous la forme $Y(\Omega) = Y_1 \cup Y_2$, avec

$$Y_1 = \{y \in Y(\Omega),\ y \geqslant a\}, \qquad Y_2 = \{y \in Y(\Omega),\ y < a\}.$$

XX. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω possédant une espérance notée $\mathbb{E}(X)$ et une variance notée $\mathbb{V}(X)$.
Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

Partie E : le problème du collectionneur

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un fabricant de tablettes de chocolat propose à ses acheteurs de collectionner des vignettes. Chaque tablette contient une vignette qui représente un animal que l'on découvre à l'ouverture de la tablette. Le nombre d'animaux différents représentés sur les vignettes est égal à n et on suppose que ces animaux sont répartis de façon équiprobable entre les tablettes.

Un collectionneur achète des tablettes jusqu'à obtenir l'ensemble de la collection, c'est-à-dire pour chacun des n animaux au moins une vignette le représentant.
Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On note T_k la variable aléatoire égale au nombre d'achats effectués par le collectionneur au moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents, éventuellement avec des doublons.
On note Z_k le nombre d'achats effectués par le collectionneur entre le moment où sa collection comporte pour la première fois $k-1$ animaux différents et le moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents.

XXI. En utilisant les notations précédentes, désigner la variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection.

XXII. Déterminer la loi de T_1.

XXIII. **1.** On suppose que q est un entier supérieur ou égal à 2. Calculer la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours le même animal au cours de ses q premiers achats.

2. En déduire, pour tout $q \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(T_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}.$$

3. En déduire la loi de T_2.

4. On suppose que la collection contient 100 animaux. Calculer le nombre minimal d'achats que le collectionneur doit effectuer pour que la probabilité d'obtenir deux animaux différents soit supérieure ou égale à 0,99.

5. Pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, justifier que

$$Z_k = \begin{cases} T_1 \text{ si } k = 1, \\ T_k - T_{k-1} \text{ si } k \geqslant 2. \end{cases}$$

6. En déduire, pour $k \geqslant 2$, une expression de T_k en fonction des Z_i.

7. Démontrer que Z_k suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Z_k.

8. En déduire que

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = nH_n.$$

9. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

XXIV. On admet que les variables aléatoires Z_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.

1. Exprimer $\mathbb{V}(T_n)$ en fonction de n, B_n et H_n.

2. En déduire que $\mathbb{V}(T_n) \leqslant \dfrac{n^2\pi^2}{6}$.

XXV. Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant \lambda n \ln n\right) \leqslant \frac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln n)^2}.$$

XXVI. Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0,

$$\mathbb{P}\left(T_n \geqslant nH_n + n\ln n\right) \leqslant 0,01.$$

3.2 Sujet de la seconde épreuve écrite



EBE MAT 2

SESSION 2021

CONCOURS EXTERNE ET TROISIEME CONCOURS

CAPES ET CAPES-CAFEP CORRESPONDANTS

Section : MATHÉMATIQUES

SECONDE ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie et poursuivre l'épreuve.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Objectif du problème

Soit a un nombre réel. On se propose d'étudier les suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = (a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n. \tag{1}$$

On note E_a l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1).

Pour toute suite $u \in E_a$ et tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Partie A : une première approche

I. Un élève propose d'utiliser un tableur pour calculer les premières valeurs d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_a$, une fois les valeurs de a, u_0, u_1 et u_2 fixées. Il prépare la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D
1	n	u_n	a	1
2	0	2		
3	1	2		
4	2	3		
5	3			
6	4			

La valeur choisie pour le paramètre a est stockée dans la cellule D1.
Quelle formule l'élève peut-il saisir dans la cellule B5 pour obtenir les valeurs de la suite en utilisant la poignée de recopie vers le bas ?

II. Démontrer que, pour tout nombre réel a, les suites constantes appartiennent à E_a.

Partie B : le cas $a = 0$

Dans cette partie, on étudie le cas où $a = 0$. On cherche l'ensemble E_0 des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 2u_{n+1}. \tag{2}$$

III. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E_0.
On considère la suite $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$e_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ e_n = 0.$$

1. Vérifier que $e \in E_0$.
2. Soit λ un nombre réel. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - \lambda e_n$. Démontrer qu'il existe un réel λ tel que $v_2 = 3v_1 - 2v_0$ et démontrer que pour cette valeur de λ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n. \tag{3}$$

3. Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$v_0 = \alpha + \beta, \qquad\qquad v_1 = \alpha + 2\beta.$$

4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \alpha + \beta 2^n$.

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, où $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite constante de valeur 1.

IV. Réciproquement, démontrer que toute suite de la forme mentionnée à la question **III. 5.** appartient à E_0.

V. **1.** Déterminer l'ensemble E_0.

2. Comment s'appelle le raisonnement mobilisé dans les questions **III.** et **IV.** qui a permis de déterminer l'ensemble E_0 ?

Partie C : le cas $a = 3$

On étudie à présent le cas où $a = 3$. On cherche l'ensemble E_3 des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n. \tag{4}$$

Pour cela, on va utiliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

VI. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E_3.

1. Pour tout entier naturel n, trouver une relation entre U_{n+1}, A et U_n.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

3. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que P est inversible puis que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D, que l'on déterminera.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. En déduire qu'il existe trois nombres réels x, y, z tels que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = x + y \times 2^n + z \times 3^n.$$

6. Démontrer que x, y, z s'expriment chacun linéairement en fonction de u_0, u_1, u_2.

VII. Démontrer que toute combinaison linéaire des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E_3.

VIII. Déterminer l'ensemble E_3.

IX. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E_3 telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer u_n pour tout entier naturel n.

X. Déterminer la limite de cette suite en $+\infty$.

XI. Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^5$.

XII. Un élève utilise cet algorithme sur la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_3 telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il s'étonne de recevoir un message d'erreur. Comment le professeur peut-il expliquer ce message ?

Partie D : le cas général

Cette partie a pour objectif d'interpréter avec un recul de niveau première année de master les résultats des parties précédentes.

Soit a un nombre réel. On considère l'application θ définie par :

$$\theta : \begin{cases} E_a & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

XIII. **1.** Rappeler sans démonstration quelle est la structure algébrique de l'ensemble des suites réelles.

2. Démontrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

XIV. **1.** Démontrer que θ est une application linéaire.

2. Démontrer que θ est une application bijective.

3. En déduire la dimension de l'espace-vectoriel E_a.

XV. En prenant appui sur les parties précédentes, déterminer une base de E_0 et une base de E_3.

Problème n° 2

Notations
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

La *radioactivité*, terme inventé vers 1898 par Pierre Curie, est un phénomène physique au cours duquel des noyaux atomiques instables se désintègrent spontanément avec dégagement d'énergie sous forme de divers rayonnements. Un noyau instable est dit *radioactif*.

Partie A : étude de la radioactivité d'un noyau atomique

Soit λ un nombre réel strictement positif. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et a pour densité la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$. Étant donné un noyau radioactif, on modélise sa durée de radioactivité, c'est-à-dire le temps (exprimé en jours) nécessaire à sa désintégration, par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle dont le paramètre réel strictement positif λ est appelé *caractéristique de radioactivité* du noyau considéré.

I. Démontrer que pour tout nombre réel positif t,

$$\mathrm{P}(X \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et en déduire $\mathrm{P}(X > t)$.

II. Interpréter chacune de ces probabilités en termes de durée de radioactivité.

III. Démontrer que, pour tous nombres réels positifs t et h,

$$\mathrm{P}_{(X>t)}(X > t + h) = \mathrm{P}(X > h).$$

IV. Pour $h \in \mathbb{R}^+$, interpréter $\mathrm{P}_{(X>t)}(X > t + h)$.

V. Expliquer pourquoi on peut affirmer que la désintégration radioactive est un phénomène sans mémoire.

VI. Justifier l'existence de l'espérance de la variable aléatoire X et déterminer sa valeur. Interpréter ce résultat en termes de durée de radioactivité.

VII. Justifier l'existence de la variance de la variable aléatoire X. Déterminer l'écart-type de la variable aléatoire X.

Partie B : étude de l'évolution d'un échantillon de noyaux radioactifs

VIII. Soit N_0 un entier naturel non nul. On dispose au départ d'un échantillon de N_0 noyaux radioactifs dont la caractéristique de radioactivité est un nombre réel strictement positif λ. On se propose d'étudier l'évolution au cours du temps du nombre de noyaux radioactifs (c'est-à-dire n'étant pas encore désintégrés) présents dans l'échantillon. On note $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon à l'instant t, exprimé en jours à compter du départ.

1. Lorsque l'on dispose d'un échantillon contenant un grand nombre de noyaux, on estime habituellement la probabilité qu'un noyau de l'échantillon soit encore radioactif à l'instant t par la proportion de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon à l'instant t. Donner une justification mathématique de cette démarche.

2. Utiliser les résultats de la **partie A** pour établir que, selon cette estimation, $N(t) = N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour tout réel positif t.

3. Quelle réponse pourrait-on apporter à un élève faisant remarquer que le nombre $N(t)$ ainsi obtenu n'est pas toujours un entier naturel ?

IX. On appelle *demi-vie* d'un noyau de l'échantillon, notée τ, la durée, exprimée en jours, au bout de laquelle la moitié des noyaux de l'échantillon se sont désintégrés.

1. Exprimer la demi-vie d'un noyau radioactif en fonction de sa caractéristique de radioactivité λ.
2. L'iode 131 a une demi-vie de 8 jours. Quelle est sa caractéristique de radioactivité ?
3. Pour un noyau d'iode 131, calculer la probabilité que le temps nécessaire à sa désintégration soit compris entre 6 et 10 jours.

X. 1. Comment justifier dans le cadre des programmes du lycée que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$?

2. Justifier par un argument mathématique la proposition suivante, à la base de la loi de désintégration radioactive : « la probabilité, pour un noyau de caractéristique de radioactivité λ, radioactif à l'instant t, d'être désintégré à l'instant $t+\Delta t$ (avec Δt petit) est approximativement égale à $\lambda\Delta t$ ».

XI. 1. Démontrer que, si une variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, alors la variable aléatoire $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ. *On pourra calculer* $\mathrm{P}(X \leqslant t)$.

2. Dans le langage Python, la fonction `random.random()` renvoie un nombre de l'intervalle $[0, 1[$ distribué selon la loi uniforme et l'instruction `math.log(x)` renvoie le logarithme népérien du nombre strictement positif `x`.
Écrire une fonction `expo(Lambda)` prenant en argument un réel `Lambda` et qui renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre `Lambda`.

3. On considère la fonction `mystere(Lambda,t)` prenant en argument un réel `Lambda` et un réel positif `t`, définie de la manière suivante :

```
def mystere(Lambda,t):
    N0 = 1000
    N = 0
    for k in range(N0):
        X = expo(Lambda)
        if X > t:
            N = N + 1
    return N/N0
```

   a. Interpréter le résultat renvoyé par `mystere(Lambda,t)`.

   b. Écrire, à l'aide de la fonction `mystere`, une commande permettant d'obtenir une valeur approchée du résultat de la question **IX.3**.

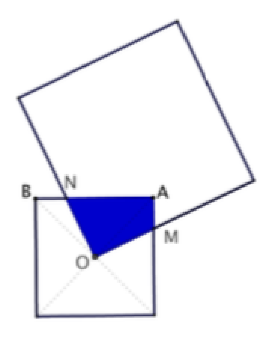
3.3 Exemples de sujets de l'épreuve orale sur dossier



Thème : géométrie plane

L'exercice

Les côtés des carrés ci-contre mesurent respectivement 4 cm et 6 cm.
Un des sommets du grand carré est le centre O du petit carré.
Montrer que l'aire colorée reste constante lorsqu'on fait tourner le grand carré par rotation de centre O.



Les productions de trois groupes d'élèves de seconde

Groupe 1

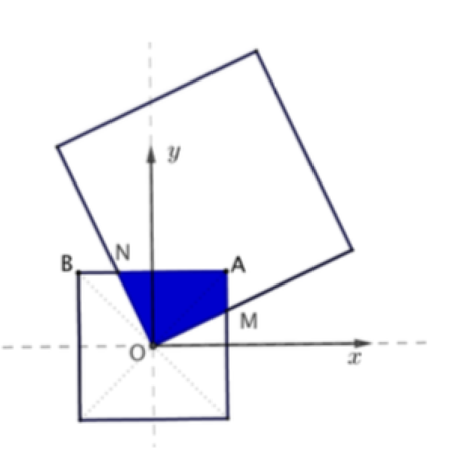
Dans l'aire coloriée, on voit un triangle qui, par recollement, va former un quart du petit carré. D'où l'aire est constante, égale à un quart de l'aire du petit carré.

Groupe 2

En prolongeant les droites (OM) et (ON) à l'intérieur du petit carré, on découpe le petit carré en quatre morceaux isométriques. La surface cherchée est donc $\frac{1}{4} \times 4 \times 4 = 4\,\text{cm}^2$.

Groupe 3

On considère le repère orthonormé de centre O et dont les axes sont les droites (Ox) et (Oy) parallèles aux côtés du petit carré.
Les points A, B, M, N sont définis sur la figure. On pose α l'angle $\widehat{xOM}$.
Alors on a $A(2;2)$, $B(-2;2)$, $M(2;2\sin(\alpha))$ et $N(-2\sin(\alpha);2)$.
L'aire du polygone OMAN est la somme des aires d'un trapèze et d'un triangle mais on n'arrive pas à les calculer.



Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les réponses de ces trois groupes du point de vue de la compétence « raisonner ».

2 – Présenter deux méthodes de résolution de l'exercice telles qu'elles pourraient être exposées à l'issue d'un temps de travail par groupes.

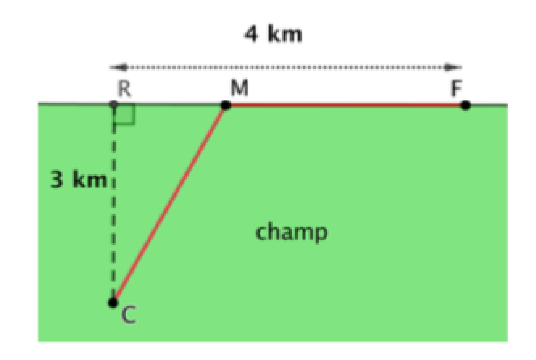
3 – Proposer deux exercices, l'un au niveau lycée, l'autre au niveau collège, sur le thème de la *géométrie plane*.



Thème : optimisation

L'exercice

Une agricultrice doit se rendre du point C de son champ à sa ferme F. Cette agricultrice se trouve à 3km de la route qui mène à la ferme comme indiqué sur la figure ci-contre.
Sur la route $[RF]$ son tracteur roule à 40km/h mais il roule à 20km/h dans son champ.
À quel endroit M doit-elle rejoindre la route afin que son parcours soit le plus rapide ?



Les productions de trois élèves de terminale

Élève 1

Je pose $RM = x$ et j'ai calculé la longueur $CM + MF$. J'obtiens une fonction $f(x) = 4 - x + \sqrt{x^2+9}$.
J'ai dérivé et j'ai obtenu $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+9}} - 1$.
Comme $f'(x) < 0$ la fonction est strictement décroissante de 7 jusqu'à 5. Donc il vaut mieux qu'elle fasse intégralement le trajet dans son champ.

Élève 2

Si elle rejoint la route tout de suite, elle mettra 9 min *ensuite elle mettra* 6 min *pour rejoindre la ferme soit* 15 min. *Si elle passe à travers champs alors elle devra faire* 5 km *à* 20 km/h *et elle mettra* 15 min.
La durée du parcours est constante, égale à 15 min, *elle rejoint la route où elle veut.*

Élève 3

Avec le tableur, je calcule, pour toutes les distances possibles de la distance RM (entre 0 et 4 km), la distance MC avec Pythagore, puis les temps de parcours en heures.
Le temps minimal total est 0,2299 pour $x \approx 1{,}7$ km.

	A	B	C	D	E	F
1	RM	CM	MF	durée par champ	durée par route	durée totale
2	0	3,00	4,00	0,15	0,1	0,2500
3	0,1	3,00	3,90	0,1501	0,0975	0,2476
...	...	...	...	...	...	...
18	1,6	3,40	2,40	0,17	0,06	0,2300
19	1,7	3,45	2,30	0,1724	0,0575	0,2299
20	1,8	3,50	2,20	0,1749	0,055	0,2299
...	...	...	...	...	...	...

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs et en précisant l'aide que l'on pourrait leur apporter.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle qu'elle pourrait figurer dans les cahiers des élèves d'une classe de terminale.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *optimisation* dont l'un au moins s'appuiera sur une situation en lien avec les autres disciplines ou la vie courante.

4 Analyse et commentaires : épreuves écrites

Le jury se réjouit de constater que les copies sont dans l'ensemble plus soignées et mieux rédigées que lors des précédentes sessions. Les questions apparaissent dans l'ordre du sujet, ce qui facilite le travail de correction.
En revanche certaines copies manquent particulièrement de soin, ce qui est regrettable dans le cadre d'un concours de recrutement d'enseignants. On trouve également quelques copies à l'orthographe déficiente, y compris parfois dans le nom des théorèmes.
Pour davantage de clarté, les candidats sont invités à paginer leurs copies. Il est également apprécié qu'ils encadrent le résultat ou soulignent la conclusion de la question.

Le niveau des problèmes posés a permis à un grand nombre de candidats de s'engager dans leur résolution et de traiter un nombre important de questions, de sorte que les copies sont plus denses que lors des dernières sessions. Les questions d'algorithmique ont été davantage abordées et mieux réussies que par le passé.

Qualité de l'argumentation et de l'expression écrite

Au-delà de la maîtrise des connaissances et des compétences mathématiques nécessaires à la résolution du problème, l'évaluation des copies porte aussi sur la qualité de l'argumentation tant au niveau de l'expression française que mathématique. Le CAPES et le CAFEP étant des concours de recrutement de professeurs, qui seront investis d'une mission d'explicitation et de transmission des savoirs, il est naturel que l'évaluation de leurs copies accorde une place privilégiée à la clarté, la rigueur, la justesse et la précision des réponses apportées, ce qui est loin d'être le cas dans certaines copies. Une partie notable des candidats est attentive à expliciter la démarche utilisée, sans sauter d'étapes, mais ce n'est malheureusement pas le cas de tous.

Le raisonnement par récurrence demeure un obstacle majeur pour de nombreux candidats.
De manière générale, il a été observé un manque de rigueur dans l'utilisation du langage mathématique : absence de quantificateurs, confusion entre équivalence et implication, succession d'égalités sans lien explicite. Une méconnaissance assez profonde de la bonne utilisation des quantificateurs, utilisés comme abréviations, apparaît dans nombre de copies : les symboles d'implication et d'équivalence sont très souvent utilisés à mauvais escient, par exemple en lieu et place de la conjonction « donc » entre deux propositions énoncées en français. De la même manière, certains calculs sont menés sans qu'aucun lien logique entre les différentes lignes qui le constituent ne soit indiqué et sans vérifier que les hypothèses nécessaires sont satisfaites : division par un nombre réel sans s'assurer qu'il est non nul ou division dans des inégalités sans vérifier que le diviseur est strictement positif, par exemple.

L'écriture mathématique est souvent peu rigoureuse : on utilise l'écriture u_n pour désigner la suite (u_n) ou l'écriture f(x) pour désigner la fonction f. Les limites sont manipulées sans précaution et la justification de leur existence est très souvent oubliée. On constate régulièrement l'absence de parenthésage, en particulier dans l'écriture des intégrales (où le dx manque aussi parfois).

On rencontre encore souvent des candidats qui démarrent leur raisonnement en partant de la relation à démontrer pour démontrer que celle-ci est vraie, courant alors le risque de tourner en rond.

Enfin il convient d'adapter la longueur de la rédaction à la difficulté de la preuve à apporter. Il n'est pas judicieux de consacrer une demi page à des trivialités et de ne rien écrire par ailleurs lorsque des justifications sont attendues.

4.1 Première épreuve écrite

Le sujet de la première épreuve écrite portait sur le problème du collectionneur. Les premières parties, indépendantes les unes des autres, démontraient des résultats ensuite réinvestis pour aboutir à une estimation du nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'intégralité de la collection.
La partie A portait sur les sommes harmoniques et l'existence de la constante d'Euler. La partie B portait sur le problème de Bâle, traité en utilisant le noyau de Dirichlet. Dans la partie C, les lois géométriques, leur espérance et leur variance étaient étudiés. Dans la partie D, il était demandé de démontrer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev et le problème du collectionneur était enfin abordé dans la dernière partie.

Beaucoup de candidats ont abordé bon nombre de questions et sont arrivés assez loin dans le sujet.

Partie A

Question I. Il s'agissait d'un très classique encadrement. Cette question a été globalement bien traitée. Toutefois, un certain nombre de candidats se sont contentés d'un graphique, parfois sans justification ni explication sur les aires considérées, alors qu'une démonstration en bonne et due forme était attendue. De plus, de nombreux candidats utilisent dans l'inéquation la règle de passage à l'inverse sans justifier la position des quantités par rapport à 0, voire affirment que la fonction inverse est décroissante sur **R***. Enfin, quelques candidats ont tenté très maladroitement une démonstration par récurrence.

Question II. La sommation demandée nécessitait de traiter à part le cas n=1, ce qui a été noté par peu de candidats. Certains ont toutefois raisonné par récurrence ce qui permet de ne pas oublier ce cas.
Un certain nombre de candidats n'hésitent pas à considérer l'intégrale de 0 à 1 de l'intégrale de la fonction inverse ou même à écrire ln(0) sans que cela ne leur pose de problème.

Question III.1. La question est globalement bien traitée, bien que le théorème de comparaison utilisé ici ne soit quasiment jamais cité. On trouve dans de nombreuses copies un raisonnement par encadrement alors qu'il suffisait d'une minoration.

Question III. 2. Un certain nombre de candidats ont oublié de mentionner que ln(n) est strictement positif lorsque n>2 avant de diviser dans l'inégalité de la question II. La limite du quotient ln(n+1)/ln(n) a mis en difficulté nombre de candidats : beaucoup ont admis que les suites (ln(n+1)) et (ln(n)) sont équivalentes sans aucune justification. Toutefois, certains ont judicieusement observé que ln(n+1)/ln(n)>1, ce qui suffisait pour conclure sans avoir à calculer la limite de ce quotient.

Question IV. 1. La plupart des candidats connaissent la définition de suites adjacentes, bien que certains ajoutent l'hypothèse $v_n > u_n$, ou substituent cette hypothèse au fait que (u_n-v_n) tende vers 0.
L'étude de la monotonie des deux suites n'a pas toujours été réussie et le signe de la différences de deux termes consécutifs est parfois donné sans aucune justification ou avec une utilisation (vouée à l'échec) de développements limités. Plusieurs candidats ont prouvé astucieusement la monotonie à l'aide de l'encadrement de la question I, sans utiliser directement la concavité du logarithme népérien.

Question IV. 2. Certains ne connaissent pas le théorème des suites adjacentes et démontrent la convergence des deux suites vers une limite commune, en oubliant parfois de montrer l'existence des limites. De nombreux candidats ont par ailleurs oublié de prouver que gamma était positif.

Question V. 1. Si la première inégalité est souvent bien justifiée, c'est moins le cas pour la seconde. Peu de candidats pensant à utiliser les questions déjà traitées.

Question V. 2. Cette question a été peu traitée mais peu réussie. Les programmes proposés fonctionnent rarement, avec des erreurs sur le test d'arrêt de la boucle while. Beaucoup de candidats n'ont pas utilisé l'encadrement de la question V.1 et ont souvent uniquement calculé le terme H_n. On dénombre aussi de nombreuses erreurs de syntaxe Python.

Partie B

Dans cette partie, les questions IX.1 à IX.3, bien que très souvent abordées, l'ont rarement été de façon satisfaisante. Les calculs de limites impliqués dans ces questions ont posé de graves problèmes aux candidats, ainsi que la notion de fonction de classe C^1. Certains candidats ont souhaité utiliser des équivalents pour certains calculs de limites, très souvent à mauvais escient, en les additionnant sans aucune précaution. D'autres ont utilisé des développements limités (ce qui pouvait mener à la bonne réponse) de façon mal maîtrisée : le reste peut changer d'ordre d'une ligne à l'autre, ou disparaitre ou n'être jamais mentionné.

Question VI. La question est globalement bien traitée, bien que là encore le fait que la fonction inverse est décroissante est peu mentionné. Certains candidats ont tenté une preuve par une récurrence, souvent mal rédigée, et qui n'utilise pas l'hypothèse de récurrence.

Question VII. Cette question a mis en évidence les lacunes des candidats au sujet des séries : les théorèmes pouvant être utilisés ici ne sont pas maîtrisés et il y a parfois confusion entre les théorèmes sur les suites et ceux sur les séries. Dans de nombreuses copies, le résultat est intuitivement là mais les candidats parlent régulièrement des limites avant même de montrer que la suite (B_n) converge. Certains considèrent que 2-1/n est un majorant de la suite (B_n), sans voir que cela dépend de l'entier n. Rappelons qu'une suite bornée n'est pas nécessairement convergente et qu'une suite majorée par 2 ne converge pas nécessairement vers 2.

Question VIII. 1. On relève quelques confusions entre les formules de Moivre et d'Euler. Quelque fois, lorsque le sigma est scindé en deux, le cas k=0 est comptabilisé dans les deux sous-sommes.

Question VIII. 2. Cette question a été peu traitée et peu réussie. Il semble que la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique ne démarrant pas à 0 n'est pas bien maîtrisée ; aussi certains candidats « cassent » la somme en deux pour faire apparaitre des sommes de termes consécutifs de suites géométriques de premier terme 1 et commençant à 0. Le fait que la raison soit différente de 1 afin d'appliquer la formule bien connue est fréquemment oublié.

Question VIII. 3. Cette question a été plutôt réussie. Plusieurs candidats utilisent la question précédente puis passent à la limite, ou remplacent t par 0 dans cette formule sans plus de justification. D'autres utilisent la définition de $D_n(0)$ donnée dans l'énoncé mais se trompent lorsqu'il s'agit d'évaluer la somme des 1 pour k allant de 1 à n : certains indiquent n(n+1)/2, d'autres 1, d'autres enfin donnent n-1, ou 1. D'autres se trompent dans la valeur de cos(0).

Question IX. 1. La plupart des candidats ayant abordé cette question pensent à séparer la continuité en 0 et la continuité en dehors de 0. La continuité de f sur l'intervalle]0; π/2] n'est pas toujours justifiée (aucune mention du fait que le dénominateur ne s'annule pas, utilisation du mot "composée" à mauvais escient). Certains ont calculé la limite de t/sin(t) en 0 mais oublié de mentionner que cette limite était égale à f(0) pour justifier la continuité de f en 0.

Question IX. 2. De nombreux candidats pensent à la limite du taux d'accroissement en 0 mais n'arrivent pas à la calculer. Quelques candidats se sont essayés à l'utilisation de développements limités de façon peu maîtrisée : les restent disparaissent ou changent d'ordre d'une ligne à l'autre, par exemple. D'autres ont tenté des démonstrations (fausses) avec des équivalents, en déduisant du fait que sin(t) est équivalent à t en 0 que la limite de 1/sin(t)-1/t vaut 0 en 0. Il était bien sûr possible d'utiliser le théorème de prolongement de la dérivée en 0 (ce qui permettait d'obtenir aussi la question IX.3), ce que certains candidats ont fait sans toujours citer ce théorème. Notons enfin que les correcteurs ont pu lire à plusieurs reprises l'argument suivant : comme f(0) est constante, f est dérivable en 0 et f'(0)=0.

Question IX. 3. La définition de fonction de classe C^1 semble mal connue et la continuité de la dérivée est souvent oubliée. Peu de candidats sont parvenus à montrer la continuité de f' en 0, en dehors de quelques-uns maîtrisant les développements limités.

Question X. 1. D'une manière générale, les candidats sont globalement à l'aise sur les intégrations par parties, en dehors des classiques erreurs de signe. Cependant, la rédaction n'est pas toujours satisfaisante : les fonctions utilisées ne sont pas explicitées, ce qui rend délicat la compréhension des calculs et le fait qu'elles soient de classe C^1 est très peu mentionné. On trouve dans quelques copies des expressions sin(k π) non réduites, sauf à la fin du calcul, ce qui alourdit considérablement la rédaction.

Question X. 2. La question est plutôt bien réussie par les candidats l'ayant abordée. Certaines rédactions montrent néanmoins que la linéarité de l'intégrale usuelle n'est pas toujours maîtrisée : on lit des arguments du type théorème de convergence dominée pour justifier la linéarité, ou encore certains candidats disent l'admettre car ne savent pas la justifier. Certains candidats ne jugent pas utile de proposer des étapes intermédiaires, peut-être parce que cela leur a semblé évident.

Question X. 3. Cette question simple a le plus souvent été réussie. Quelques candidats n'ont pas jugé utile de simplifier leur résultat et répondu $2\pi^2/6$.

Question X. 4. Plusieurs candidats font des erreurs de signe mais prétendent obtenir le résultat.

Question X. 5. Les candidats ont pensé naturellement au changement de variables $x = t/2$, certains prennent le temps de justifier que c'est un changement de variable légitime. Dans les intégrales, le dt est parfois oublié ce qui ne facilite pas la mise en lumière du changement de variable.

Question XI. La fonction donnée est souvent définie sur tout l'intervalle par $g(t)=t(2-2t/\pi)/\sin(t)$ sans évoquer la valeur en 0 et le fait que g soit de classe C^1 n'est pas toujours précisé. La question IX est citée en référence mais la fonction n'est pas clairement définie comme le produit de f par la fonction polynomiale adéquate.

Question XII. L'intégration par parties n'est pas toujours bien menée et il est rare de voir l'argument "g est de classe C^1", pourtant essentiel ici, apparaître. Lors du calcul de la limite, peu de candidats ont rigoureusement utlisé l'inégalité triangulaire et le théorème d'encadrement pour conclure. On note quelques tentatives (peu ou mal justifiées) de mise en œuvre du théorème interversion limite/intégrale par un argument de convergence uniforme ou du théorème de domination.

Question XIII. Cette question de conclusion a souvent été réussie. On peut noter qu'elle a été régulièrement abordée par des candidats qui n'ont pas réussi les questions précédentes.

Partie C

Il est à noter que le début de cette partie avait été posé dans le sujet de 2019.
Les lacunes sur les séries qui ont pu être repérées en 2019 sont de nouveau mis en évidence.

Question XIV. On note des confusions fréquentes entre la série, sa somme et les sommes partielles. La règle de d'Alembert est peu souvent utilisée pour conclure quant à la nature de la série.

Question XV. Cette question a été très peu réussie et a montré les lacunes des candidats sur les séries. Parmi ceux ayant tenté une démonstration en dérivant la série, peu sont parvenus à le faire correctement. Les résultats sur les séries entières semblent peu connus. Certains candidats dérivent la série terme à terme sans aucune précaution, voire en affirmant qu'une série dont le terme général est dérivable est toujours dérivable ou en annonçant qu'il s'agit de fonctions polynomiales.

Question XVI. La positivité des p_k et la convergence de la série de terme général p_k sont souvent oubliées.

Question XVII. La convergence absolue des séries considérées est très rarement mentionnée et lorsqu'elle l'est, celle-ci n'est pas maitrisée (on s'intéresse à la valeur absolue de la série au lieu de la série des valeurs absolues). Les candidats font souvent le lien avec la question XV pour déterminer la variance. Les calculs sont parfois laborieux mais aboutissent souvent. La formule de Huygens est quelquefois donnée fausse ou redémontrée.

Question XVIII 1. La linéarité de l'espérance est souvent connue des candidats, bien que certains justifient leurs calculs par la mutuelle indépendance.

Question XVIII 2. Cette question est moins bien traitée que la précédente et notamment l'argument d'indépendance mutuelle est souvent passé sus silence. Certains candidats se perdent dans des calculs laborieux en voulant introduire la formule de Huygens.

Partie D

Cette partie comportait deux questions de cours, la démonstration des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebichev. Ces deux inégalités avaient déjà fait l'objet de questions en 2019, lors de la seconde épreuve écrite. Cette partie a été assez peu abordée par les candidats et parmi ceux l'ayant traitée, peu l'ont fait correctement.

Question XIX. Les preuves proposées par les candidats manquent en général de rigueur : peu signalent que Y_1 et Y_2 forment une partition de l'univers-image, d'autres les traitent comme des variables aléatoires et non comme des parties de **R**. Quelques candidats semblent connaître la preuve de ce résultat mais enchaînent les inégalités sans aucune justification : le fait que Y est positive et que a>0 doivent doit intervenir dans la démonstration. Quelques candidats ont rédigé une preuve correcte pour des variables aléatoires à densité, ce qui était accepté. On note également quelques rédactions utilisant des indicatrices, le plus souvent mal maîtrisées.

Question XX. Peu de candidats vérifient qu'ils peuvent utiliser l'inégalité de Markov, notamment l'hypothèse de positivité. Certains candidats disent appliquer l'inégalité de Markov à |X-E(X)|

Partie E

En dehors des premières questions, cette partie a été assez peu abordée.

Question XXI. Cette question est régulièrement abordée et réussie. On trouve souvent T_k au lieu de T_n.

Question XXII. L'univers-image (qui est demandé lorsque l'on détermine la loi d'une variable aléatoire) est rarement évoqué.

Question XXIII. 1. Le résultat est souvent trouvé mais avec des justifications peu précises. Pa exemple, les probabilités sont multipliées sans justification de l'indépendance des évènements et l'écriture de l'événement à l'aide d'une réunion incompatible d'intersection d'événements indépendants est très rare.

Question XXIII. 2. La plupart des candidats ayant abordé cette question ont compris le lien avec la question précédente, mais l'égalité des deux événements n'est pas toujours bien écrite, on trouve souvent une seule des deux inclusions.

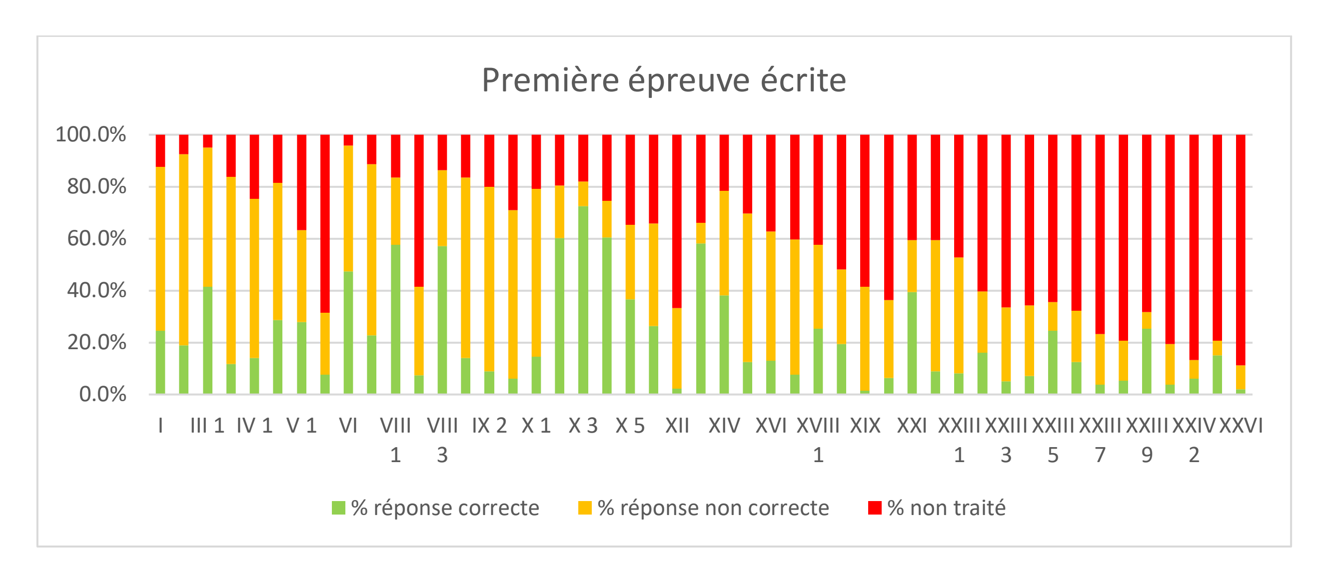
Question XXIII. 3. Comme pour la question XXII, l'univers image n'est quasiment jamais donné. Peu de candidats font le lien avec la question précédente et certains prouvent directement ce résultat. Dans plusieurs copies, certains candidats parlent de loi géométrique sans remarquer que l'univers image ne convient pas.

Question XXIII 4. Quelques candidats résolvent une équation à la place d'une inéquation ou commencent par une inéquation qui se transforme en équation, d'autres annoncent q=1 sans prendre de recul.

Question XXIII. 5. La réponse est en général bien rédigée et expliquée.

Les questions suivantes ayant été peu abordées, il est difficile d'en tirer des remarques pertinentes.
Parmi elles, la question XXIII. 9 a été abordée et réussie par un peu plus de candidats que les autres (nombre d'entre eux n'ont traité que cette question dans la partie E).

Le diagramme suivant décrit la réussite des candidats aux différentes questions de ce sujet.



4.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet était constitué de deux problèmes.

Problème 1

Le problème 1 portait sur l'étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 3.

Partie A

Question I. Le symbole $ est très souvent oublié ou apparaît parfois inutilement devant la lettre de la colonne.
Question II. Il était particulièrement maladroit de choisir la lettre *a* pour désigner la valeur constante de la suite.
Certains raisonnements sont ambigus, au point qu'il est difficile de deviner la pensée du candidat, par exemple lorsque celui-ci entreprend de montrer que si la suite est constante et vérifie la relation alors elle est constante…

Partie B

Question III.1. Cette question s'est révélée discriminante quant à la maîtrise des quantificateurs et à la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante.
Alors que ce mode de raisonnement ne peut s'appliquer ici on a rencontré des tentatives de récurrence.
Question III.2. La recherche de λ a souvent abouti à des absurdités ou a dérouté les candidats qui se sont perdus dans leur calcul. D'autres partent des relations données puis tournent en rond sans raisonner par équivalences.
Question III.3. Cette question a été très mal réussie, beaucoup de candidats n'ayant pas compris le lien entre u_n et v_n. Le système de deux équations à deux inconnues n'a pas souvent été identifié.
Question III.4
Certains candidats font appel à l'équation caractéristique d'une relation de récurrence d'ordre 2, qui pouvait permettre de conclure.
L'hypothèse de récurrence forte est rarement bien rédigée.
Question III.5. Certaines écritures amènent à s'interroger sur la compréhension du concept de *combinaison linéaire*.
Question IV. Là encore, certains candidats partent de l'égalité à démontrer.
Question V.1. Il convient de distinguer la suite (u_n) de son terme général u_n en évitant de confondre ces deux notations. Certains candidats contournent la difficulté en rédigeant en français plutôt qu'en langage symbolique.
Question V.2
Cette question a été très peu traitée. La réponse « analyse synthèse » apparaît essentiellement dans les bonnes copies. Le raisonnement par équivalence est souvent invoqué.

Partie C

Question VI.1. Un nombre important de candidats se contentent d'écrire la relation sans la justifier.
Question VI.2. Il est ici souvent question, de façon abusive, de suite géométrique.
Question VI.3. Des candidats utilisent la règle de Sarrus pour calculer le déterminant de la matrice *P* plutôt que de développer selon une ligne ou une colonne.
L'utilisation de la calculatrice pour le calcul du déterminant et de l'inverse de *P* a permis à des candidats de gagner du temps.
Question VI.4. L'usage des pointillés en lieu et place d'un raisonnement par récurrence est assez fréquent.
Question VI.5. Dans beaucoup de copies, cette question a été finalisée dans le cadre de la question suivante.
Question VI.6. La plupart des candidats font des calculs sans penser à exploiter P^{-1} calculée précédemment.
Question VII. Cette question a été plutôt bien réussie.

Question VIII. La réponse a été rarement justifiée.
Question IX. Cette question était liée à la question VI.6.
Question X. Cette question du niveau terminale exigeait de lever une forme indéterminée en justifiant la limite obtenue de façon suffisamment rigoureuse.
Question XI. Lorsqu'elle est traitée cette question est plutôt réussie à quelques détails techniques près.
Question XII. Les arguments donnés sont souvent insuffisants.

Partie D

Question XIII.1. Il convenait de préciser le corps des scalaires de cet espace vectoriel.
Question XIII.2. Il fallait s'assurer que E_a est bien inclus dans l'ensemble des suites réelles.
Question XIV.1. Certains candidats se contentent d'écrire la définition d'une application linéaire.
Question XIV.2. La notion d'injectivité paraît mieux connue que celle de surjectivité. Cependant peu de candidats semblent avoir compris que de telles suites sont complètement déterminées par la donnée des trois premiers termes.
Certains candidats évoquent la bijection réciproque sans donner les justifications nécessaires. D'autres affirment qu'une application linéaire injective est surjective et donc bijective sans évoquer la dimension finie.
Question XIV.3. Il était indispensable de mentionner les caractères linéaire et bijectif de l'application.
Question XV. La justification reposait sur le fait que dans un espace vectoriel de dimension 3 une famille génératrice de 3 éléments est nécessairement une base.

Problème 2

Le problème 2 prenait appui sur une description de la radioactivité d'un noyau atomique à l'aide d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.

Partie A

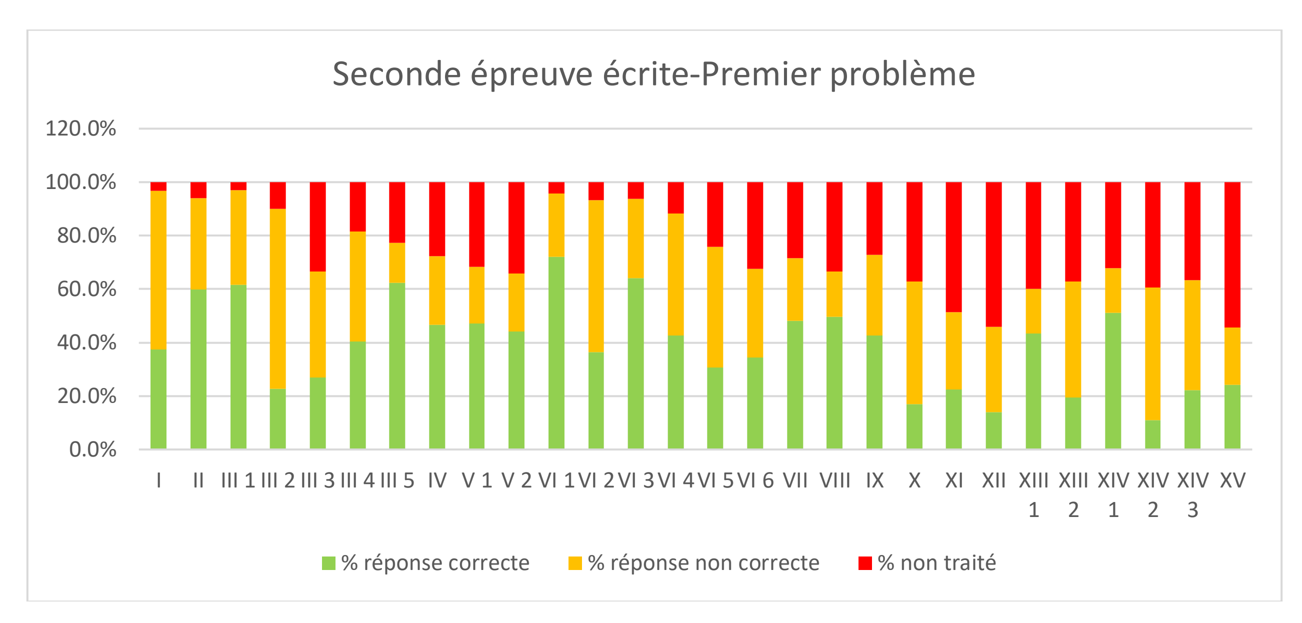
Question I. Cette question a été bien réussie dans l'ensemble.
Question II. La demande d'une interprétation consiste à faire le lien entre le modèle mathématique et la situation étudiée. Cette question révèle des contresens et une mauvaise compréhension de l'énoncé.
Question III. Cette question est souvent bien traitée, même si certains candidats s'arrangent visiblement pour tomber sur le résultat attendu sans utiliser la définition d'une probabilité conditionnelle.
Question IV. Encore une fois, l'objet même de l'interprétation ne semble pas bien saisi.
Question V. La bonne compréhension de l'expression « sans mémoire » exige d'avoir remarqué que la probabilité conditionnelle étudiée est indépendante du temps t.
Questions VI et VII. Les définitions de l'espérance, de la variance et de l'écart-type sont connues. Les intégrations par parties sont relativement réussies mais beaucoup de candidats utilisent sans aucune précaution $+\infty$ comme borne dans l'intégration par parties.
Les convergences sont souvent mal justifiées. Il convenait de mentionner que les fonctions sont de classe C^1.

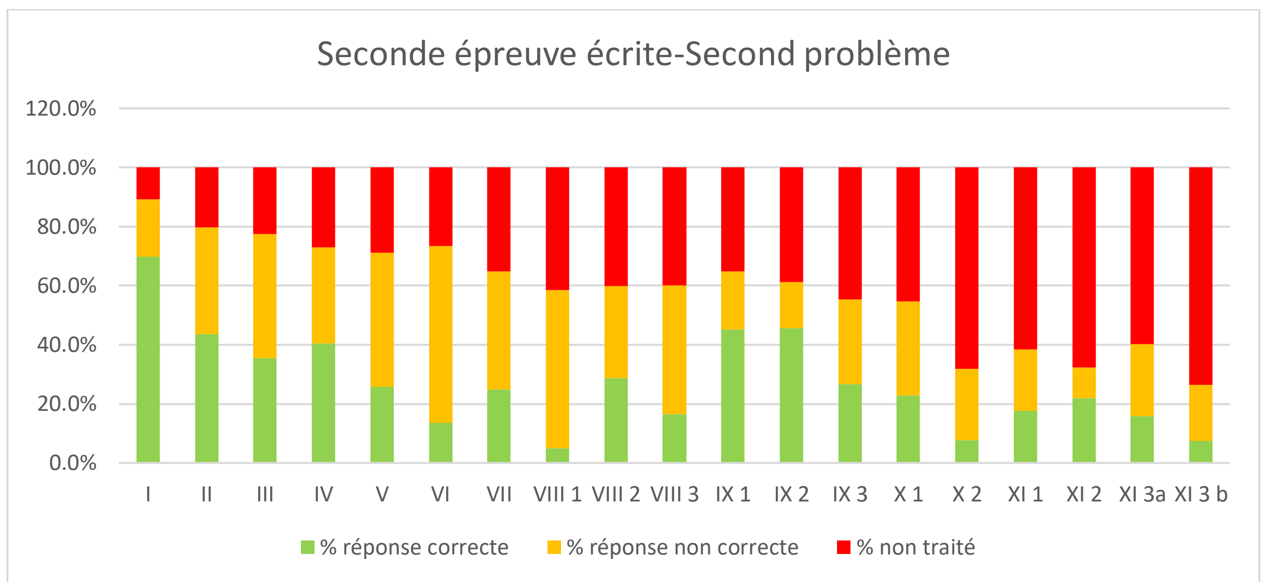
Partie B

Question VIII.1. Il s'agissait de faire référence à la loi faible des grands nombres, mais cette question n'a pas toujours été bien comprise.
Question VIII.3. Cette question a donné lieu à des réponses diverses et variées, avec des confusions entre radioactivité et désintégration. Le terme « modélisation » est très peu employé.
Questions IX.1 et IX.2. La modélisation de la demi-vie et son calcul ont été fréquemment réussies.
Question IX.3. Même si l'énoncé fait apparaître des nombres entiers de jours, il ne fallait pas perdre de vue que l'on a toujours affaire à une loi continue.
Question X.1. Il s'agissait bien ici de refaire une démonstration du cours de terminale reposant sur la valeur en 0 de la dérivée de la fonction exponentielle.
Rappelons que l'expression ambiguë (exp(0))' est à proscrire.
Question X.2. Cette question a été peu traitée.
Calculer une limite en faisant intervenir des équivalents exige une certaine rigueur.

Question XI.1. Cette question a été réussie dès l'instant où le candidat a utilisé que *U* suit la loi uniforme.
Questions XI.2, XI.3.a, X1.3.b. Ces questions peu traitées ont été assez bien réussies lorsqu'elles ont été abordées.

Les diagrammes suivants décrivent la réussite des candidats aux différentes questions de ce sujet.





5 Analyse et commentaires : épreuves orales

Les recommandations formulées dans les rapports du jury des dernières sessions demeurent largement valables.

Comme pour tout concours, une préparation soigneuse en amont des épreuves est indispensable et demeure le meilleur gage de réussite.

Critères d'évaluation

Les deux épreuves orales d'admission comportent un entretien avec le jury qui permet d'évaluer la capacité du candidat à s'exprimer avec clarté et précision, à réfléchir aux enjeux scientifiques, didactiques, épistémologiques, culturels et sociaux que revêt l'enseignement de la discipline, notamment dans son rapport avec les autres champs disciplinaires.

Il s'agit non seulement de faire la preuve de ses compétences mathématiques, mais également de montrer sa capacité à les transmettre, à en illustrer la portée par des exemples bien choisis et, plus généralement, à susciter l'intérêt des élèves pour qu'ils s'engagent dans les apprentissages. Lors de l'évaluation, le jury est plus particulièrement attentif aux critères suivants :

- maîtrise des compétences mathématiques ;
- organisation et clarté ;
- pertinence et niveau ;
- interaction avec le jury.

5.1 Mise en situation professionnelle

Déroulement de l'épreuve
La première épreuve orale d'admission est l'épreuve de mise en situation professionnelle.
Le candidat choisit un sujet de leçon, parmi deux qu'il tire au sort et dispose d'un temps de préparation de deux heures et demi. L'épreuve commence par l'exposé du plan d'étude détaillé et argumenté de la leçon choisie (d'une durée maximale de vingt minutes), se poursuit par le développement par le candidat d'une partie de ce plan choisie par le jury et s'achève par un entretien avec le jury portant sur ce développement ou sur tout autre aspect en lien avec le sujet.

Attentes du jury
Les attentes du jury sont définies par le texte de l'arrêté définissant les épreuves d'admission. Comme précisé dans les rapports précédents, lors de cette première épreuve est évaluée la capacité du candidat à maîtriser et à organiser les notions mathématiques correspondant au thème proposé par le sujet, à les exposer avec rigueur, clarté et précision dans un langage adapté (tant au niveau de la langue française que du langage mathématique) et à répondre de façon convaincante aux questions du jury qui portent sur des aspects mathématiques, didactiques et pédagogiques, en faisant preuve d'une certaine aisance au niveau du fond (aptitudes mathématiques) comme de la forme (aptitudes de communication). Une très bonne maîtrise de la langue française, tant à l'écrit qu'à l'oral, est attendue des candidats.
Les éléments qui viennent d'être évoqués entrent pour une part importante dans l'évaluation.

Quelques remarques et conseils de préparation et de passation de l'épreuve

- Concernant le niveau auquel se situe l'exposé du candidat

L'épreuve de mise en situation professionnelle prend appui sur les programmes de mathématiques du collège et du lycée général et technologique. Si le niveau auquel se situe l'exposé est laissé au libre choix du candidat, les notions présentées doivent être abordées par le candidat avec un recul correspondant au niveau M1 du cycle master.

Globalement, les candidats fixent préalablement et de façon correcte le niveau de l'exposé. Certains font l'erreur de penser qu'une leçon placée au niveau collège est plus simple à présenter. Même si de très bonnes leçons peuvent être faites en restant à un niveau collège, quand la notion est travaillée jusqu'en terminale avec de nouvelles propriétés, il est dommage de ne pas mentionner ces propriétés dans sa présentation.

Le candidat peut prendre appui sur des prérequis élémentaires sans expliciter ceux-ci auprès du jury afin de respecter le temps imparti.

Le développement ou l'entretien avec le jury peut également déboucher sur une démonstration en lien avec le thème de la leçon, même si cette démonstration n'est pas exigible des élèves du secondaire. À titre d'exemple, ont pu être demandées une démonstration du théorème de Thalès ou de Pythagore, ou de leur réciproque, ou une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.

Quand cela s'avère possible, il est pertinent de mettre en perspective une même notion sur différents niveaux de classe (par exemple, dans la leçon intitulée *Périmètres, aires, volumes*, il est apprécié que le candidat fasse appel au calcul intégral pour démontrer des formules admises au niveau du cycle 4 (volume d'une sphère ou d'un cône de révolution). Il en est de même de la leçon intitulée *Problèmes de constructions géométriques* qui, si elle permet d'illustrer des notions de géométrie du collège (droites remarquables d'un triangle), peut s'ouvrir sur la géométrie vectorielle avec des constructions relevant d'un niveau supérieur.

- Concernant la présentation de l'exposé

Le support de l'exposé du plan détaillé est laissé au libre choix du candidat : présentation intégralement écrite au tableau, diaporama vidéo projeté, présentation alternant l'utilisation du tableau et celle d'un diaporama, illustrations réalisées à l'aide d'outils logiciels. Il n'y a pas d'attente particulière concernant le support choisi pour l'exposé. Une entière liberté est laissée au candidat pour organiser et utiliser le tableau à sa convenance lors de l'oral, notamment lors de la présentation du plan et celle du développement. En particulier, il n'y a pas d'exigence que l'intégralité du plan exposé tienne sur le tableau, la possibilité étant offerte au candidat d'effacer pour poursuivre l'exposé de son plan. Néanmoins, il importe que le tableau soit clairement organisé et que ce qui y figure soit lisible.

Le jury se réjouit que de nombreux candidats présentent un plan structuré, riche et cohérent, tout en faisant preuve d'une bonne gestion du temps alloué. Certains exposés sont de plus enrichis d'illustrations ou d'applications originales et créatives, manifestant un véritable recul par rapport au sujet traité.

Si les logiciels et les outils de capture d'écran apportent une dynamique appréciable lors de l'exposé (présentation rapide des prérequis, illustration graphique, projection des définitions et des propriétés), il convient de souligner les écueils observés. L'utilisation du copier-coller peut en effet conduire à la présentation d'un support abondant et non hiérarchisé, donnant l'impression d'une leçon lue sans que le candidat ne montre de recul sur ce qu'il énonce. Elle s'accompagne souvent d'une présentation terne et monotone et d'une posture éloignée des capacités attendues d'un enseignant. Il est en revanche apprécié l'annonce d'un plan et de sa structure avant sa déclinaison. L'utilisation d'extraits de documents divers ou de manuels différents est un atout lorsqu'elle sert un propos construit et cohérent. Il convient d'être attentif à l'ordre et à la cohérence de ces éléments. À titre d'exemple sur la leçon 31 (*Fonctions polynômes du second degré, équations et inéquations du second degré, applications*), l'équation de l'axe de symétrie de la parabole est donnée sous la forme $x = u$ sans qu'au préalable il ait été montré l'existence de deux nombres réels u et v tels que $ax^2 + bx + c = a(x - u)^2 + v$. Dans cette même leçon, le discriminant a été parfois défini sans lien avec la forme canonique. Le candidat doit aussi être conscient de l'invalidité de raisonnements fondés sur des arguments circulaires (c'est-à-dire supposant comme prémisses ce que

l'argument est sensé prouver). À titre d'exemple, le produit scalaire ne saurait être défini par son expression dans une base orthonormée si une telle base est ultérieurement définie par les valeurs des produits scalaires des vecteurs qui la constituent.
Le plan détaillé doit offrir des ouvertures sur au moins deux développements consistants en lien avec la leçon, parmi lesquels le jury pourra choisir. Il peut être demandé une démonstration d'un résultat énoncé ou encore la résolution intégrale ou partielle d'un exercice d'illustration ou d'application figurant dans le plan du candidat. Le jury déplore que certains candidats admettent tous les énoncés de leur plan (ce qui laisse entendre qu'ils ne sont pas prêts à en présenter une démonstration) et ne suggèrent aucun exemple ou exercice susceptible de faire l'objet d'un développement. Faut-il rappeler que les candidats doivent être capables de démontrer un résultat constituant le cœur de la leçon, même si la preuve de ce résultat ne figure pas dans les programmes des classes du secondaire (collège et lycée) sur lesquels s'appuie le programme du concours ?
Le jury valorise la présence d'illustrations qui peuvent revêtir des formes variées : exemples et contre-exemples, applications, schémas, graphiques, exercices nécessitant ou non des outils logiciels (géométrie dynamique, tableur, logiciel de programmation). L'utilisation des outils numériques pour illustrer la leçon de manière pertinente est valorisée. À ce titre, il peut être judicieux pour les candidats d'avoir élaboré et maîtrisé, au cours de leur année de préparation, une bibliothèque d'illustrations bien choisies et d'avoir réfléchi à leur intérêt mathématique, didactique et pédagogique.

- *Concernant la maîtrise des contenus mathématiques*

La maîtrise des contenus mathématiques présentés constitue le premier attendu de la part du jury. Les définitions, théorèmes et propriétés doivent être énoncés de manière exacte et précise et le candidat doit bien distinguer le statut de chaque énoncé.
Une attention particulière doit être portée sur l'emploi des quantificateurs et des connecteurs logiques, les conditions d'existence ou d'unicité d'un objet mathématique, les articulations logiques entre les différentes lignes d'un raisonnement ou d'un calcul algébrique. Il est systématiquement demandé au candidat d'écrire au tableau de manière formalisée un énoncé ou une propriété mathématique en lien avec la leçon. Cela permet au jury d'apprécier l'aptitude du candidat à utiliser correctement le langage mathématique (vocabulaire, notations, syntaxe).
Le jury a été étonné de l'incompréhension par quelques candidats de mots simples du registre mathématique, comme conjecture ou conservation. Lors de la préparation au concours, il est essentiel de se familiariser avec les notations pour savoir les distinguer : f et $f(x)$, AB et [AB], etc. Il est important par ailleurs d'utiliser un vocabulaire adapté à l'enseignement dans une classe et d'éviter les formulations telles que « passer de l'autre côté », « simplifier les moins », etc.
Quelques candidats contextualisent le contenu de la leçon (utilisation dans d'autres disciplines des notions présentées, aspect historique, prolongements vers les classes supérieures). Une telle présentation témoigne souvent d'une appréciable réflexion préalable.

- *Concernant la posture devant le jury*

Tout au long de l'épreuve, le jury accorde une grande importance à la posture du candidat, qui doit correspondre à celle que l'on attend d'un futur enseignant en termes d'interaction avec l'auditoire. Le jury est attentif à la qualité des traces écrites au tableau, notamment au niveau de l'orthographe, mais aussi au soin apporté à la réalisation des schémas et des représentations graphiques.
L'expression orale doit être de qualité tant dans le choix du niveau de langue adopté que dans la formulation de phrases complètes respectant les règles élémentaires de syntaxe et de grammaire. L'interaction avec le jury concerne aussi bien l'écoute, la bonne compréhension du questionnement et des aides apportées que la réactivité du candidat.

Si de nombreux candidats adoptent une posture professionnelle et présentent de nombreuses qualités prosodiques (débit, fluidité, variations de la tonalité), certains demeurent malheureusement dos au jury ou très dépendants de leurs notes, sans parvenir à capter l'attention, voire en étant inaudibles.
Il est naturellement attendu d'un futur professeur qu'il présente son avec conviction et dynamisme.

- Concernant les manuels numériques

La mise à disposition par les éditeurs des manuels de collège et lycée au format numérique permet à tous les candidats d'avoir accès aux mêmes ressources et peut leur éviter de s'encombrer de lourdes valises. Aucun manuel papier n'est fourni aux candidats. Ceux-ci peuvent éventuellement, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels. Seuls sont autorisés les livres en vente dans le commerce, à condition qu'ils ne soient pas annotés. Sont exclus les ouvrages de préparation aux épreuves orales du concours. Le jury se réserve la possibilité d'interdire l'usage de certains ouvrages dont le contenu serait contraire à l'esprit des épreuves.
Comme précisé précédemment, l'utilisation d'extraits de documents divers ou de manuels différents est un atout lorsqu'elle sert un propos construit et cohérent.

- Concernant les logiciels

Les candidats maîtrisent de mieux en mieux en mieux les outils numériques, notamment le logiciel de géométrie dynamique, et proposent plus souvent d'eux-mêmes un programme en langage Python.
La liste des logiciels disponibles en salle de préparation est donnée chaque année sur le site du concours. Cependant le jury conseille vivement aux candidats de télécharger ces logiciels suffisamment tôt dans l'année afin de se familiariser avec leur utilisation.
On constate que certaines fonctionnalités restent peu exploitées, comme la simulation sur tableur ou le calcul formel.

Conseils pour la préparation

Les attentes du jury sont d'autant plus facilement satisfaites le jour de l'oral que le candidat a mené un travail de long terme dans la préparation des leçons. Il peut être judicieux de regrouper sa réflexion autour de quelques grandes thématiques mentionnées dans les rapports précédents :

- les phénomènes évolutifs discrets et continus, thème qui englobe l'étude des suites, des fonctions, de la dérivation (évolution instantanée), mais aussi la proportionnalité (croissance linéaire) et l'exponentielle ;
- l'analyse asymptotique, qui comprend les limites de suites et de fonctions, mais aussi les croissances comparées entre fonctions logarithmes, polynômes, exponentielles ;
- la géométrie plane, avec en particulier les configurations, les transformations, le repérage, les problèmes de constructions, la trigonométrie et les nombres complexes ;
- la géométrie dans l'espace, dont le repérage (y compris sur la sphère), les solides usuels mais aussi les sections planes et les calculs de volumes ;
- les statistiques et probabilités, avec le traitement des données et les phénomènes dépendant du hasard, sans oublier les liens qui unissent fréquences et probabilités ;
- les calculs, exacts et approchés, la mesure des grandeurs, le calcul intégral, l'utilisation d'algorithmes, la résolution d'équations et d'inéquations ;
- les outils mathématiques de modélisation (suites, fonctions, matrices, graphes, lois de probabilités).

Préparer les différentes leçons à travers ces grands thèmes permet d'acquérir une vision globale des programmes de l'enseignement secondaire, de percevoir l'intérêt et le rôle des différents éléments qui les composent, les liens qui les unissent, les similitudes qu'ils peuvent présenter, mais aussi leurs spécificités propres.

À propos de certaines leçons

Voici la liste des sujets proposés aux candidats à la session 2021.

1. Exemples de dénombrements dans différentes situations.
2. Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle.
3. Variables aléatoires discrètes.
4. Variables aléatoires réelles à densité.
5. Statistique à une ou deux variables, représentation et analyse de données.
6. Multiples et diviseurs dans N, nombres premiers.
7. PGCD et PPCM dans Z. Applications.
8. Congruences dans Z. Applications.
9. Différentes écritures d'un nombre complexe. Applications.
10. Utilisation des nombres complexes en géométrie. Applications.
11. Trigonométrie. Applications.
12. Géométrie vectorielle dans le plan et dans l'espace.
13. Repérage dans le plan, dans l'espace, sur une sphère.
14. Droites et plans dans l'espace.
15. Transformations du plan. Frises et pavages.
16. Relations métriques et angulaires dans le triangle.
17. Solides de l'espace : représentations et calculs de volumes.
18. Périmètres, aires, volumes.
19. Produit scalaire dans le plan. Applications.
20. Applications de la notion de proportionnalité à la géométrie.
21. Problèmes de constructions géométriques.
22. Problèmes d'alignement, de parallélisme, d'intersection.
23. Proportionnalité et linéarité. Applications.
24. Pourcentages et taux d'évolution. Applications.
25. Systèmes d'équations et systèmes d'inéquations linéaires. Applications.
26. Problèmes conduisant à une modélisation par des équations ou des inéquations.
27. Problèmes conduisant à une modélisation par des graphes ou par des matrices.
28. Problèmes conduisant à l'utilisation d'algorithmes.
29. Différents types de raisonnement en mathématiques.
30. Applications des mathématiques à d'autres disciplines.
31. Fonctions polynômes du second degré. Équations et inéquations du second degré. Applications.
32. Suites numériques. Limites.
33. Suites définies par récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$. Applications.
34. Limite d'une fonction réelle de variable réelle.
35. Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.
36. Nombre dérivé. Fonction dérivée. Applications.
37. Fonctions exponentielle et logarithme népérien. Applications.
38. Fonctions convexes. Applications.
39. Primitives, équations différentielles.
40. Intégrales, primitives.
41. Exemples de calculs d'intégrales (méthodes exactes, méthodes approchées).

42. Exemples de résolution d'équations (méthodes exactes, méthodes approchées).
43. Exemples de modèles d'évolution.

Les titres apportent un cadre aux thématiques qu'il convient de respecter, comme il est important de proposer des exemples, des problèmes et des applications lorsque cela est mentionné dans le titre.

Le jury fait part de différentes remarques sur ces leçons.

— Leçon 1 (exemples de dénombrements dans différentes situations)

Cette leçon d'exemples est énoncée dans l'esprit des objectifs des nouveaux programmes du lycée qui est de dénombrer quelques objets combinatoires de base et de manipuler quelques notions ensemblistes. Pour cette leçon, certains candidats se sont retrouvés en difficulté pour proposer des exemples simples et concrets, d'autres pour proposer d'autres situations que celles s'appuyant sur un tableau à double entrée, un diagramme de Venn ou un arbre. La maîtrise du vocabulaire spécifique et des notions sous-jacentes est un attendu important.

— Leçons 2 à 5 (probabilités et statistiques)

Ces leçons peuvent conduire à proposer de nombreuses définitions. Les outils numériques ont permis à des candidats de les présenter rapidement pour prendre le temps de proposer des exemples et des exercices plus aboutis.

La définition d'une probabilité doit être mentionnée avec précision et clarté en précisant le niveau auquel on se place. La définition d'une variable aléatoire discrète a posé problème à de nombreux candidats.

Les conditions d'application de la formule des probabilités totales doivent être est connues.

La modélisation doit faire l'objet d'un travail soigné : trop de candidats se lancent dans des calculs sans prendre le temps de bien définir les événements, ce qui conduit à des confusions. Quand la représentation par un arbre pondérée est utilisée, peu de candidats sont capables de justifier leurs calculs par les principes mathématiques sous-jacents.

Pour trop de candidats, une variable aléatoire réelle discrète est par essence finie ou alors ne prend que des valeurs entières. Il est important de penser à définir les opérations sur les variables aléatoires (aX+b, X+Y) avant de se lancer dans la présentation des propriétés liées.

Pour la leçon 5 (*Statistique à une ou deux variables, représentation et analyse de données*), certains exposés permettaient peu de développements, d'autres se sont bornées aux statistiques à une variable ou aux variables statistiques discrètes. Une vigilance est à porter sur ce que représente l'histogramme, sur la définition de la médiane et la méthode proposée aux élèves pour la déterminer.

— Leçons 6 à 8 (arithmétique)

Si les notions sont introduites au cycle 4, elles sont étudiées jusque dans l'option mathématiques expertes de terminale, ce qui permet d'expliciter les propriétés énoncées, comme celle de la divisibilité. Certaines questions du jury n'ont pas trouvé de réponses : à quel endroit l'inégalité pour le reste est stricte dans la division euclidienne ? Comment démontrer qu'un nombre n'est pas divisible par 2 ? Quelle justification à la condition d'arrêt de l'algorithme d'Euclide ?

Pour la leçon 8 (*Congruences dans Z, applications*), il s'agit bien de se placer dans Z et non dans N.

— Leçons 9 à 11 (nombres complexes et trigonométrie)

Pour la leçon 9 (différentes écritures d'un nombre complexe, applications), le choix de situations variées permettant de s'interroger sur le choix de l'écriture adaptée d'un nombre complexe a été apprécié. Si l'unicité de la forme algébrique est en général indiquée, peu de candidats précisent que ce n'est pas le cas pour les formes trigonométrique et exponentielle. La leçon 10 (*Utilisation des nombres complexes en géométrie, applications*) doit bien évidemment se prêter à la représentation de situations géométriques et

ne peut en rester à un traitement algébrique des nombres complexes. Pour la leçon 11 (*Trigonométrie, applications*), peu de candidats se posent la question de la définition des lignes trigonométriques dans le triangle rectangle : dépendent-elles des longueurs des côtés ? Par ailleurs, certains candidats ne font pas le lien entre la trigonométrie de collège et celle de lycée et trop peu sont capables de démontrer les valeurs remarquables du cosinus et du sinus.

Le jury attire l'attention des candidats sur les notations (oubli récurrent de [2π]) et sur l'intérêt de faire le lien avec les transformations du plan.

— Leçons 12 à 22 (géométrie)

La qualité de certaines prestations montre le travail conséquent entrepris pour s'approprier des notions davantage présentes dans le secondaire. En effet, ces leçons nécessitent des connaissances, dont la maîtrise est très variable : droites remarquables du triangle, cercle circonscrit à un triangle, définitions du sinus, cosinus dans un triangle rectangle, théorème d'Al-kashi, loi des sinus, théorème de la médiane, théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre, polyèdres réguliers, formule d'Euler, perspectives autres que la perspective cavalière, etc.

La géométrie doit contribuer à l'apprentissage de la logique. De ce point de vue, il est regrettable que certains candidats ne fassent pas la différence entre une définition et une propriété. La formulation rigoureuse d'une implication ou d'une équivalence est un attendu. Or certains candidats éprouvent des difficultés pour démontrer par exemple l'équivalence entre colinéarité et déterminant nul. Par ailleurs, la différence entre la réciproque et la contraposée n'est pas acquise par certains candidats.

Pour ces leçons, le jury invite à distinguer dans les propriétés, celles qui nécessitent une base orthonormée de celles qui ne nécessitent qu'une base quelconque, à définir correctement longitude et latitude, à donner une définition claire pour une droite de l'espace,
Pour la leçon 16 (*Relations métriques et angulaires dans le triangle*), le candidat doit être capable de justifier s'il place cette leçon en collège (mesures d'angles positives ou nulles, cosinus et sinus compris entre 0 et 1) ou en lycée (angles de vecteurs, produit scalaire).

Pour la leçon 18 (*Périmètres, aires, volumes*), si les formules exposées restent d'un niveau cycle 4, des exemples d'application de ces formules pourraient être donnés au moins au niveau du lycée.

Pour la leçon 19 (*Produit scalaire dans le plan, applications*), les manipulations des diverses écritures du produit scalaire peuvent conduire à des exercices riches et intéressants.

Pour les leçons 21 (*Problèmes de constructions géométriques*) et 22 (*Problèmes d'alignement, de parallélisme, d'intersection*), il est important de ne pas se contenter de faire des rappels de propriétés de cours et de se concentrer sur les problèmes. Certains candidats ne comprennent pas « problèmes de constructions » et proposent des exercices de géométrie. D'autres, qui se lancent dans des constructions à la règle et au compas, se retrouvent en difficulté pour les justifier.

— Leçon 23 et 24 (proportionnalité, pourcentages)

Certains candidats exposent les différentes propriétés élémentaires de la proportionnalité qui offrent aux élèves différentes stratégies de résolution. Ces leçons permettent aussi des liens avec d'autres disciplines.

Il est important de ne pas se cantonner au produit en croix (souvent confondu avec la règle de trois) et de justifier le lien avec la représentation graphique. Pour la leçon 24 (*Pourcentages et taux d'évolution, applications*), des candidats ont proposé de belles applications sur le taux moyen et sur l'indice base 100, qui constitue un moyen de comparaison entre différentes évolutions.

Une mise en perspective du concept de linéarité dans le cadre d'une dimension supérieure à 1 est appréciée et fait partie du recul M1 attendu de la part du candidat.

— Leçon 25 (systèmes d'équations linéaires et systèmes d'inéquations linéaires, applications)

La leçon a posé des difficultés à de nombreux candidats, notamment pour la résolution d'un système d'équation linéaire à deux équations et deux inconnues dans le cas général ou pour donner une

représentation graphique de l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires. En général, peu d'applications sont présentées et on a souvent oublié de donner une propriété sur le nombre de solutions.

— Leçon 26 à 27 (problèmes conduisant à une modélisation)

La résolution de problèmes est l'activité centrale en mathématiques. Elle ne limite pas à la mobilisation de notions et de stratégies, elle participe aussi à la construction des notions et à leur appropriation. Ainsi la présentation de problèmes historiques ayant fait émerger des notions ou de situations-problèmes conduisant à lever un obstacle didactique peut également se révéler intéressante.

Dans ces leçons, le candidat doit commencer par expliquer ce que l'on entend par “modélisation”.

On a apprécié la présentation de modélisations très variées et liées à différents domaines des mathématiques.

— Leçon 28 (Problèmes conduisant à l'utilisation d'algorithmes)

Il est important de distinguer utilisation d'un algorithme et utilisation d'un logiciel.

— Leçon 29 (différents types de raisonnements en mathématiques)

Cette leçon ne doit pas se limiter à un catalogue des différents raisonnements. Des exemples variés sont attendus en guise d'illustration. Le jury a régulièrement invité les candidats à utiliser correctement les quantificateurs.

Le raisonnement par disjonction de cas, ne se limite pas au champ de l'arithmétique, et son utilisation en géométrie ou en algèbre est appréciée.

— Leçon 30 (applications des mathématiques aux autres disciplines)

La présentation d'exercices faisant appel à différentes notions mathématiques a été appréciée. Les applications doivent être pertinentes du point de vue des autres disciplines et le candidat est amené à les justifier de manière précise.

— Leçon 31 à 40 (suites et fonctions)

Pour la leçon 31 (*Fonctions polynômes du second degré, équations et inéquations du second degré, applications*), les applications sont souvent peu pertinentes et les relations entre les différentes formes d'écriture et leurs interprétations géométriques peu précisées. Les exemples d'équations se ramenant au second degré ou l'application sur les équations différentielles du second ordre ou les suites récurrentes d'ordre deux ont été appréciés.

Pour les leçons 32 (*Suites numériques, limites*) et 34 (*Limite d'une fonction réelle de variable réelle*), il est important de proposer des définitions et propriétés correctement quantifiées, notamment pour la notion de limite. La leçon ne doit cependant pas se limiter à une liste des propriétés. La réflexion sur les réciproques éventuelles des propriétés énoncées est importante.

Si les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques rentrent bien dans le cadre de la la leçon 33 (*Suites définies par récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$*, applications*), d'autres exemples plus avancés seraient bienvenus. Certains candidats ne connaissaient pas les résultats généraux sur la monotonie et sur le théorème du point fixe.

Pour la leçon 35 (*Théorème des valeurs intermédiaires, applications*), l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires est trop souvent mal formulé et très mal mis en œuvre. L'idée de la démonstration de ce théorème doit être maîtrisée. Un exemple d'algorithme pour trouver une solution à une équation du type $f(x)=0$ est bienvenu. Il est important de savoir expliquer l'algorithme.

Pour la leçon 36 (*Nombre dérivé, fonction dérivée, applications*), les candidats ont introduit leur exposé par une illustration graphique. Il est important de maîtriser le lien entre la limite du taux d'accroissement et la tangente, de ne pas écrire d'égalités entre des limites avant d'avoir justifié leur existence, de connaître les

ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions présentées et les démonstrations des formules indiquées dans les tableaux des dérivées usuelles.

La proposition d'autres applications que l'étude de la monotonie et l'étude d'extremum a été appréciée, notamment la levée d'indétermination de limites.

Les applications proposées pour la leçon 37 (*Fonctions exponentielle et logarithme népérien, applications*) sont très variées. Cette leçon nécessite d'avoir un recul didactique sur la construction de ces fonctions. Il s'agit en particulier de motiver l'apparition de la notation e^x et de savoir enchainer les propriétés dans un ordre cohérent. Cette leçon nécessite aussi la maîtrise des prérequis (continuité, dérivabilité, limites).

Les applications proposées pour la leçon 38 (*Fonctions convexes, applications*) sont souvent peu pertinentes. Par ailleurs, les candidats éprouvent des difficultés à faire le lien entre fonction convexe et ensemble convexe ou entre une propriété graphique et son écriture analytique, à définir la notion d'intervalle, à maîtriser les notions de sécantes et de tangentes.

La leçon 39 (*Primitives, équations différentielles*) ne doit pas se limiter à une succession de définitions et de propriétés. Il convient d'être vigilant sur le vocabulaire et de connaître les démonstrations de base. La référence d'applications physiques des équations différentielles permet de fournir des illustrations pertinentes.

Des interprétations géométriques et des schémas sont appréciés dans le cadre de la leçon 40 (*Intégrales, primitives*). Le jury attire l'attention des candidats sur l'ordre de présentation de l'exposé ; il convient d'avoir une réflexion préalable sur la notion d'aire afin d'éviter des incohérences.

— Leçon 41 à 43 (leçons d'exemples)

Si des leçons d'exemples, bien préparées, ont pu être présentées, certains candidats n'ont malheureusement proposé qu'une liste de définitions et propriétés sans aucun exemple.

La leçon 41 (*Exemples de calculs d'intégrales, méthodes exactes, méthodes approchées*) peut être par exemple enrichie, au-delà de la seule méthode des rectangles, par la présentation de la méthode de Monte Carlo ou par une approche algorithmique de ces méthodes. Il convient d'être vigilant sur la rigueur dans la description des méthodes approchées.

Dans la leçon 42 (*Exemples de résolution d'équations, méthodes exactes, méthodes approchées*), les équations peuvent aussi être différentielles, ou impliquer plusieurs variables.

Pour la leçon 43 (exemples de modèles d'évolution), les candidats ont présenté et illustré différents modèles d'évolution. Il est important de présenter pour chaque modèle les hypothèses qui conduisent à l'envisager et de discuter ensuite de ses limites.

5.2 Épreuve sur dossier

Déroulement de l’épreuve

Comme pour la première épreuve, la durée de la préparation est de deux heures et demi. L’entretien dure une heure, avec un exposé du candidat de 20 minutes maximum et un entretien de 40 minutes maximum.

L’épreuve permet d’apprécier la capacité du candidat à engager une réflexion pédagogique pertinente et à communiquer efficacement. Elle donne également au candidat la possibilité de valoriser sa culture scientifique et sa connaissance des programmes officiels.

L’épreuve prend appui sur un dossier fourni par le jury, portant sur un thème des programmes de mathématiques du collège ou du lycée. Ce thème est illustré par un exercice complété par des productions d’élèves, avec trois questions posées aux candidats. Les réponses permettent d’apprécier les qualités pédagogiques et la réflexion didactique. Elles concernent l’énoncé de l’exercice, les compétences que celui-ci mobilise, les démarches possibles, les méthodes de résolution ou les éléments d’évaluation. Le candidat doit également proposer des exercices s’inscrivant dans le thème du dossier et visant les objectifs précisés par le jury.

Pendant vingt minutes, le candidat expose ses réponses aux questions posées dans le dossier. L’entretien avec le jury prend appui sur la présentation faite par le candidat, en particulier sur les exercices qu’il a proposés, aussi bien en ce qui concerne leur résolution que leur intégration dans une séquence pédagogique.

L’entretien permet aussi d’évaluer la capacité du candidat à prendre en compte les acquis et les besoins des élèves, à se représenter la diversité des conditions d’exercice du métier d’enseignant, à en connaître le contexte dans ses différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Pour cette dernière partie de l’entretien, le candidat est évalué sur ses capacités à se projeter dans le métier à partir d’une question, à replacer sa réflexion par rapport aux enjeux du système éducatif et à articuler son action avec les valeurs de la République.

Attentes du jury

Le jury met en avant la qualité des prestations des candidats pour cette épreuve dont les notes moyennes sont plus élevées que celles de la première épreuve. Il regrette cependant le problème de la gestion du temps par les candidats, notamment pour le choix des exercices sur le thème proposé.

Si les candidats s’attachent aux points positifs des productions de l’élève, il leur est parfois difficile de comprendre ce que celui-ci a voulu faire. Par ailleurs, les candidats se réfèrent peu aux compétences mathématiques, pourtant rappelées dans l’énoncé.

Des candidats ont de bonnes idées de remédiation pour les élèves, notamment en travaillant le questionnement qui leur serait proposé pour comprendre leurs erreurs. Parfois, l’accompagnement proposé est souvent trop loin de la production de l’élève : « je lui conseillerais de revoir le cours » ou « je lui conseillerais de faire d’autres exercices ».

La présentation de la correction de l’exercice au tableau ou dans les cahiers des élèves manque souvent d’éléments de rédaction, ou de justification. Le candidat doit garder à l’esprit que ce qu’il rédige est censé correspondre à la trace écrite qui subsistera. S’inspirer d’une ou plusieurs productions d’élève pour proposer une correction peut être pertinent en évitant des corrections déconnectées des attendus des classes considérées.

Les exercices proposés donnent souvent l’impression d’avoir été choisis par défaut au dernier moment : copies d’écran hâtives, exercices classiques placés là par hasard avec de vagues justifications improvisées, etc. Les candidats ne motivent pas souvent le choix de ces exercices et manquent de recul sur les énoncés issus de manuels.

Échange autour des missions du professeur et du contexte du métier

De nombreux candidats exploitent de manière pertinente leurs expériences de stage en établissement. Le référentiel de compétences des enseignants peut enrichir leur connaissance des attendus du métier. Il est également important de connaître quelques dispositifs nationaux (devoirs faits, accompagnement personnalisé, etc.), ainsi que les rôles et fonctions des membres de la communauté éducative.

La réflexion par rapport aux enjeux du système éducatif est délicate et la référence aux valeurs qui le portent, dont celles de la République, souvent limitée à leur citation.

Quelques exemples de questions posées aux candidats

- Certains parents d'élèves peuvent se trouver démunis face à l'école (barrière de la langue, méconnaissance des codes scolaires, mauvais souvenirs de leur scolarité, etc.), comment les aider à se sentir à l'aise et pourquoi est-ce important d'y arriver ?
- Durant l'année de troisième, au regard des demandes des élèves et des familles, le conseil de classe émet des propositions d'orientation. Comment les enseignants peuvent-ils collectivement faire ces propositions ? Quels en sont les enjeux ?
- Chaque enseignant évalue les besoins, les progrès et les acquisitions des élèves. Quelles modalités peuvent prendre ces évaluations ? Pourquoi varier les modalités de ces évaluations ?
- L'école veille à la scolarisation inclusive de tous les enfants. Comment accueillir un élève pour lequel on a diagnostiqué un trouble de l'attention ? De manière générale, comment élaborer en équipe des réponses pédagogiques et didactiques aux besoins éducatifs particuliers des élèves ?
- Les filles obtenaient davantage de mentions que les garçons au bac S et pourtant, hors études de santé, elles sont peu présentes dans les cursus scientifiques post-bac. Que faites-vous en tant que professeur de mathématiques ?
- Le harcèlement est présent dans tous les établissements, sous des formes variées. Il est parfois difficile à déceler. Comment sensibiliser les élèves et comment prévenir ces situations ? Comment prendre en charge une situation de harcèlement ?
- Des enseignants peuvent être confrontés à la contestation d'un énoncé scientifique par des élèves à partir d'informations relevées sans discernement sur internet. Quel est le rôle d'un enseignant face à ce type d'événement ? Quel travail peut être mené en classe ?
- Avec la réforme du lycée, certains enseignements sont assurés par des professeurs de disciplines différentes (Sciences du Numérique et Technologie, Enseignement Scientifique). Comment les enseignants peuvent prendre en charge collectivement ces enseignements ? Quel est l'intérêt de l'interdisciplinarité ?
- Aucun élève n'apprend de la même manière et au même rythme, mais tous doivent maîtriser les connaissances et les compétences du socle commun. Peut-on envisager une évaluation différenciée des élèves ?

6 Annexe : ressources mises à disposition des candidats

Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation orale, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition.

Le transfert des données entre la salle de préparation et la salle d'interrogation se fait grâce au réseau de l'établissement ou éventuellement au moyen d'une clé USB fournie par le jury. L'utilisation de tout support numérique personnel est exclue.

Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser de calculatrices.

L'usage des téléphones mobiles et de toute forme d'accès à internet est interdit dans l'enceinte de l'établissement.

Les documents suivants sont mis à disposition des candidats sous forme numérique :

- réglementation du concours ;
- référentiel des compétences professionnelles ;
- programmes de Mathématiques (collège, lycée et sections de technicien supérieur) et documents ressources en ligne sur Eduscol.

Manuels numériques

Le jury remercie les éditeurs ayant mis gracieusement leurs manuels à la disposition du concours.

BELIN

- Delta : 6e (2016), cycle 4 (2016)
- Métamaths : 2de (2019) et 1re spécialité (2019)
- Cahier Python pour les maths en 2de (2020)
- Enseignement scientifique 1re (2019)
- Enseignement scientifique Terminale (2020)

BORDAS

- CQFD : 1re spécialité (2019)
- Indice : 2de (2019), 1re spécialité (2019), 1re séries technologiques (2019), Terminale mathématiques complémentaires (2020), Terminale spécialité (2020), Terminale séries technologiques, enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2020)
- Myriade : 6e cycle 3 (2016), cycle 4 (2016)
- Enseignement scientifique 1re (2019), Enseignement scientifique Terminale (2020)

DELAGRAVE

- BTS Industriels (B, C et D) (2014)

- Algomaths : 1re séries technologiques enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2019), Terminale séries technologiques enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2020)

DIDIER

- Mathsmonde : 6e cycle 3 (2017), cycle 4 (en un volume) (2016)
- Math'x : 2de (2019)
- Enseignement scientifique 1re (2019)

FOUCHER

- Sigma : 1re séries technologiques (2019), Terminale séries technologiques enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2020)
- Sigma BTS : BTS CG (2015), Mathématiques pour l'informatique BTS SIO (2014), BTS Industriels Tome 1 groupement A (2002), BTS Industriels Tome 2 groupement A (2002), BTS Industriels Tome 1 Analyse et algèbre groupements B, C et D (2014), BTS Industriels Tome 2 Statistique et probabilités groupements B, C et D (2014)

HACHETTE

- Déclic : Déclic 2de (2019), Déclic 1re (2019), Terminale mathématiques complémentaires (2020)
- Phare : 6e (2016), 5e (2016)
- Kiwi cycle 4 (2016)
- Mission Indigo : cycle 4 5e (2016), cycle 4 4e (2016), cycle 4 3e (2016)
- Barbazo : 2de (2019), 1re spécialité (2019), Terminale spécialité (2020), mathématiques complémentaires (2020)
- Calao : 1re séries technologiques mathématiques enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2019), Terminales STI2D/STL Mathématiques enseignement commun et spécialité (2020)
- Enseignement scientifique 1re (2019), Enseignement scientifique Terminale (2020)
- BTS : Mathématiques groupement A (2006), Mathématiques groupement B, C et D (2006)

HATIER

- Dimensions : 6e cycle 3 (2016), 3e année du cycle 4 (2016), cycle 4 (2016)
- Variations : 2de (2019), 1re spécialité (2019), Terminale spécialité (2020)
- Enseignement scientifique 1re (2019), Enseignement scientifique Terminale (2020)

MAGNARD

- Delta Maths : 6e (2016), cycle 4 (2017)
- Sésamath : cycle 4 (2016), Terminale spécialité (2020), mathématiques complémentaires (2020), mathématiques expertes (2020)
- Maths : 2de (2019), 1re (2019)
- Enseignement Scientifique 1re (2019), Enseignement scientifique Terminale (2020)

NATHAN

- Transmath : 6e Cycle 3 (2016), cycle 4 (2016), 2de (2019), 1re spécialité (2019)

- Techmaths : 1re enseignement commun et spécialité STI2D (2019), Terminale enseignement commun et spécialité STI2D/STL (2020)
- Hyperbole : 2de (2019), 1re (2019), Terminale spécialité (2020), mathématiques complémentaires (2020), mathématiques expertes (2020)
- Enseignement scientifique 1re (2019), Enseignement scientifique Terminale (2020)

DUNOD

- Mathématiques pour l'informatique BTS SIO (2015), Programmation en Python pour les mathématiques (2016)

ELLIPSES

- Apprendre la programmation par le jeu, à la découverte du langage Python 3 (2015)
- Python, les bases de l'algorithmique et de la programmation (2015)

EYROLLES

- Apprendre à programmer avec Python 3 (2012)
- Informatique et sciences du numérique - édition spéciale Python ! (2013)

MASSON

- Eléments d'algorithmique (1992)

Le candidat peut également, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels. Seuls sont autorisés les livres en vente dans le commerce, à condition qu'ils ne soient pas annotés. Sont exclus les ouvrages de préparation aux épreuves orales du concours. Le jury se réserve la possibilité d'interdire l'usage de certains ouvrages dont le contenu serait contraire à l'esprit des épreuves.

Logiciels

- LibreOffice
- Emulateurs de calculatrices numworks et Ti-83 premium
- Geogebra 5
- Python 3 (éditeur Pyzo avec les bibliothèques numpy, scipy et matplotlib)
- Jupyter
- Xcas
- Scratch
